ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΣΟΥΡΛΑΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

LIE-ΕΠΙΔΕΚΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ

1. ***ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΩΝ***
2. ***LIE-ΑΛΓΕΒΡΕΣ***
3. ***LIE-ΕΠΙΔΕΚΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ***
4. ***ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ LIE-ΕΠΙΔΕΚΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΩΝ***

ΠΑΤΡΑ 2008

1. ΠΕΡΙ ΑΛΓΕΒΡΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1 Έστω U ένας διανυσματικός χώρος επί του σώματος F, χαρακτηριστικής p[1], με στοιχεία x,y,z,.... Εάν τον διανυσματικό χώρο U τον εφοδιάσουμε με ένα δεύτερο νόμο εσωτερικής συνθέσεως xy, που θα τον ονομάζουμε γινόμενο, με τις ιδιότητες

1. $x(y+z)=xy+xz$ (1.1)
2. $(x+y)z=xz+yz$ (1.2)
3. $(\lambda x)y=x(\lambda y)=\lambda(xy)\ \forall x,y,z\in U$ και $\forall\lambda\in F$ (1.3)

τότε ο U ονομάζεται **άλγεβρα**. Εάν επί πλέον ισχύει η ιδιότητα :

4. $x(yz)=(xy)z$ (1.4)

η άλγεβρα U ονομάζεται **προσεταιριστική**. Έτσι μια προσεταιριστική άλγεβρα U ουσιαστικά είναι ένας δακτύλιος ως προς τους δυο εσωτερικούς νόμους συνθέσεως. Εάν δε ισχύει :

5. $xy=yx$ (1.5)

ονομάζεται **μεταθετική.**

Εάν υπάρχει στοιχείο της άλγεβρας U, που θα το συμβολίζουμε με 1, με την ιδιότητα :

6. $x1=1x=x \quad \forall x\in U$ (1.6)

τότε η άλγεβρα U λέγεται **άλγεβρα με μονάδα** ή **μοναδιαία άλγεβρα** και το στοιχείο 1 **μονάδα** ή **ουδέτερο στοιχείο** ως προς το γινόμενο.

Έστω $B=\{e_1, e_2,....,e_n\}$ μια βάση της άλγεβρας U διαστάσεως n. Τότε κάθε στοιχείο $x\in U$ θα έχει μια ανάπτυξη της μορφής :

$$x=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\cdots+\lambda_ne_n \qquad \text{με } \lambda_i\in F \tag{1.7}$$

Ο δεύτερος νόμος συνθέσεως, (δηλαδή το γινόμενο xy), της άλγεβρας U ορίζεται, σ' αυτή την περίπτωση, από n^3 **δομικές σταθερές** c_{ij}^k ως εξής: Παίρνουμε τα γινόμενα των στοιχείων της βάσεως B ανά δυο τα οποία αναλύουμε ως προς την ίδια βάση :

$$e_ie_j=c_{ij}^1e_1+c_{ij}^2e_2+\cdots+c_{ij}^ne_n=\sum_{k=1}^{n}c_{ij}^ke_k \tag{1.8}$$

Οι συντελεστές αναπτύξεως c_{ij}^k, (που είναι n^3 το πλήθος), εξαρτώνται από το γινόμενο, ή ισοδύναμα ορίζουν το γινόμενο, θεωρώντας πάντα την ίδια βάση B.

---

[1] Ένα σώμα F λέμε ότι είναι χαρακτηριστικής p με $p\in N$ εάν ισχύει

$$p\lambda=\underbrace{\lambda+\lambda+\cdots+\lambda}_{p\ \text{φορες}}=0 \quad \forall\lambda\in F.$$

Τα σώματα R και C των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών αντίστοιχα, είναι χαρακτηριστικής p=0. Παράδειγμα σώματος χαρακτηριστικής p=2 είναι το εξής : Έστω X ένα μη κενό σύνολο και P(X) το δυναμοσύνολο του. Εάν στο P(X) ορίσουμε τις πράξεις

$$A+B=(A-B)\cup(B-A)=A\cup B-A\cap B$$
$$AB=A\cap B$$

τότε το P(X) είναι ένα σώμα χαρακτηριστικής p=2, διότι

$$2A=A+A=(A-A)\cup(A-A)=\varnothing\cup\varnothing=\varnothing.$$

Το $\varnothing$ είναι το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πρόσθεση :

$$A+\varnothing=(A-\varnothing)\cup(\varnothing-A)=A\cup\varnothing=A$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1 Θεωρούμε την άλγεβρα $A_{2\times 2}$ των τετραγωνικών πινάκων 2x2 με στοιχεία από το σώμα F=R ή C. Μια βάση αυτής τής άλγεβρας είναι :

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Για να βρούμε τις δομικές σταθερές c_{ij}^{k}, (που είναι σε πλήθος $n^3=4^3=64$), ως προς τον δεύτερο νόμο συνθέσεως που είναι ο πολλαπλασιασμός των πινάκων, υπολογίζουμε τα γινόμενα e_ie_j:

$$\begin{array}{llll}
e_1e_1=e_1 & e_2e_1=0 & e_3e_1=e_3 & e_4e_1=0\\
e_1e_2=e_2 & e_2e_2=0 & e_3e_2=e_4 & e_4e_2=0\\
e_1e_3=0 & e_2e_3=e_1 & e_3e_3=0 & e_4e_3=e_3\\
e_1e_4=0 & e_2e_4=e_2 & e_3e_4=0 & e_4e_4=e_4
\end{array}$$

οπότε οι δομικές σταθερές θα είναι :

$$\begin{array}{llllllll}
c_{11}^1=1, & c_{11}^2=0, & c_{11}^3=0, & c_{11}^4=0 & c_{21}^1=0, & c_{21}^2=0, & c_{21}^3=0, & c_{21}^4=0\\
c_{12}^1=0, & c_{12}^2=1, & c_{12}^3=0, & c_{12}^4=0 & c_{22}^1=0, & c_{22}^2=0, & c_{22}^3=0, & c_{22}^4=0\\
c_{13}^1=0, & c_{13}^2=0, & c_{13}^3=0, & c_{13}^4=0 & c_{23}^1=1, & c_{23}^2=0, & c_{23}^3=0, & c_{23}^4=0\\
c_{14}^1=0, & c_{14}^2=0, & c_{14}^3=0, & c_{14}^4=0 & c_{24}^1=0, & c_{24}^2=1, & c_{24}^3=0, & c_{24}^4=0\\
c_{31}^1=0, & c_{31}^2=0, & c_{31}^3=1, & c_{31}^4=0 & c_{41}^1=0, & c_{41}^2=0, & c_{41}^3=0, & c_{41}^4=0\\
c_{32}^1=0, & c_{32}^2=0, & c_{32}^3=0, & c_{32}^4=1 & c_{42}^1=0, & c_{42}^2=0, & c_{42}^3=0, & c_{42}^4=0\\
c_{33}^1=0, & c_{33}^2=0, & c_{33}^3=0, & c_{33}^4=0 & c_{43}^1=0, & c_{43}^2=0, & c_{43}^3=1, & c_{43}^4=0\\
c_{34}^1=0, & c_{34}^2=0, & c_{34}^3=0, & c_{34}^4=0 & c_{44}^1=0, & c_{44}^2=0, & c_{44}^3=0, & c_{44}^4=1
\end{array}$$

Εάν ο δεύτερος νόμος συνθέσεως αντικατασταθεί από το νέο γινόμενο :

$$[e_i,e_j]=e_Ie_j-e_je_i$$

τότε οι αντίστοιχες δομικές σταθερές θα βρεθούν όπως και πριν αφού πρώτα υπολογίσουμε τα γινόμενα :

$$\begin{array}{ll}
[e_1,e_1]=e_1e_1-e_1e_1=0 & [e_2,e_1]=e_2e_1-e_1e_2=-e_2\\
[e_1,e_2]=e_1e_2-e_2e_1=e_2 & [e_2,e_2]=e_2e_2-e_2e_2=0\\
[e_1,e_3]=e_1e_3-e_3e_1=-e_3 & [e_2,e_3]=e_2e_3-e_3e_2=e_1-e_4\\
[e_1,e_4]=e_1e_4-e_4e_1=0 & [e_2,e_4]=e_2e_4-e_4e_2=e_2
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
[e_3,e_1]=e_3e_1-e_1e_3=e_3 & [e_4,e_1]=e_4e_1-e_1e_4=0\\
[e_3,e_2]=e_3e_2-e_2e_3=e_4-e_1 & [e_4,e_2]=e_4e_2-e_2e_4=-e_2\\
[e_3,e_3]=e_3e_3-e_3e_3=0 & [e_4,e_3]=e_4e_3-e_3e_4=e_3\\
[e_3,e_4]=e_3e_4-e_4e_3=-e_3 & [e_4,e_4]=e_4e_4-e_4e_4=0
\end{array}$$

οπότε οι αντίστοιχες δομικές σταθερές είναι :

$$\begin{array}{llllllll}
c_{11}^1=0, & c_{11}^2=0, & c_{11}^3=0, & c_{11}^4=0 & c_{21}^1=0, & c_{21}^2=-1, & c_{21}^3=0, & c_{21}^4=0\\
c_{12}^1=0, & c_{12}^2=1, & c_{12}^3=0, & c_{12}^4=0 & c_{22}^1=0, & c_{22}^2=0, & c_{22}^3=0, & c_{22}^4=0\\
c_{13}^1=0, & c_{13}^2=0, & c_{13}^3=-1, & c_{13}^4=0 & c_{23}^1=1, & c_{23}^2=0, & c_{23}^3=0, & c_{23}^4=-1\\
c_{14}^1=0, & c_{14}^2=0, & c_{14}^3=0, & c_{14}^4=0 & c_{24}^1=0, & c_{24}^2=1, & c_{24}^3=0, & c_{24}^4=0
\end{array}$$

$$c_{31}^1=0,\quad c_{31}^2=0,\quad c_{31}^3=1,\quad c_{31}^4=0 \qquad c_{41}^1=0,\quad c_{41}^2=0,\quad c_{41}^3=0,\quad c_{41}^4=0$$
$$c_{32}^1=-1,\quad c_{32}^2=0,\quad c_{32}^3=0,\quad c_{32}^4=1 \qquad c_{42}^1=0,\quad c_{42}^2=-1,\quad c_{42}^3=0,\quad c_{42}^4=0$$
$$c_{33}^1=0,\quad c_{33}^2=0,\quad c_{33}^3=0,\quad c_{33}^4=0 \qquad c_{43}^1=0,\quad c_{43}^2=0,\quad c_{43}^3=1,\quad c_{43}^4=0$$
$$c_{34}^1=0,\quad c_{34}^2=0,\quad c_{34}^3=-1,\quad c_{34}^4=0 \qquad c_{44}^1=0,\quad c_{44}^2=0,\quad c_{44}^3=0,\quad c_{44}^4=0$$

Στα επόμενα όταν θα αναφερόμαστε σε άλγεβρα U θα εννοούμε ότι είναι ορισμένη σε σώμα F χαρακτηριστικής p.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Μια άλγεβρα U ονομάζεται **μηδενική άλγεβρα**, (zero algebra) όταν όλες οι κατασκευαστικές σταθερές είναι μηδέν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.3. Μια άλγεβρα U ονομάζεται **ακεραία**, (division), όταν οι εξισώσεις αx=β και xα=β έχουν πάντα λύσεις με α≠0, δηλ. όταν κάθε στοιχείο α≠0 έχει αντίστροφο. Τότε η άλγεβρα U μπορεί να θεωρηθεί σαν σώμα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. Μια άλγεβρα U ονομάζεται **προσεταιριστική κατά δύναμη**, (power associative), εάν ισχύει:

$$x^n x^m = x^{n+m} \qquad \forall n,m\in N,\ \forall x\in V$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.5. Ένα στοιχείο x∈U, όπου η U είναι προσεταιριστική κατά δύναμη, ονομάζεται **μηδενοδύναμο**, (nilpotent), τάξης n όταν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $x^n=0$ και ο n είναι ο μικρότερος δυνατός. Η άλγεβρα U λεγεται **μηδενοδύναμη τάξης n** εάν κάθε στοιχείο της x είναι μηδενοδύναμο τάξης n.

ΠΑΡΕΔΕΙΓΜΑ 1.2. Τα στοιχεία της άλγεβρας $A_{2\times 2}$ που είναι μηδενοδύναμα τάξης 2 έχουν την γενική μορφή :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ -\alpha & -\alpha \end{pmatrix}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.6. Δύο στοιχεία x και y με x≠y λέγονται **ορθογώνια** αν xy=yx=0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3. Στην άλγεβρα $A_{3\times 3}$ τα στοιχεία :

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad y=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι ορθογώνια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.7. Μια προσεταιριστική κατά δύναμη άλγεβρα U λέγεται **μηδενοάλγεβρα τάξης n**, (nilalgebra), όταν όλα της τα στοιχεία είναι μηδενοδυναμικά της ίδιας τάξης n**.**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4. Από την άγλεβρα $A_{n\times n}$ θεωρούμε το υποσύνολο B των πινάκων που μετατίθενται μεταξύ τους. Το σύνολο B προφανώς είναι διανυσματικός χώρος ως προς την γνωστή πρόσθεση των πινάκων. Είναι δε και άλγεβρα με δεύτερο νόμο σύνθεσης τον πολλαπλασιασμό των πινάκων. Γίνεται δε μηδενοάλγεβρα τάξης 2 εάν σαν δεύτερο νόμο σύνθεσης θεωρήσουμε το γινόμενο : $[\alpha,\beta]=\alpha\beta-\beta\alpha$ με $\alpha,\beta\in B$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.8. Ένα στοιχείο e μιας οποιασδήποτε άλγεβρας U λέγεται **ταυτοδύναμο**, (idempotent), εάν $e^2=e$. Το ταυτοδύναμο στοιχείο e λέγεται **πρωτογενές** ή **αρχικό**, (primitive), εάν δεν υπάρχουν ορθογώνια ταυτοδύναμα στοιχεία x,y, δηλαδή στοιχεία που να ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$x^2=x,\quad y^2=y,\quad xy=yx=0$$

έτσι ώστε $e=x+y$. Θα λέγεται δε **κύριο**, (principal), εάν δεν υπάρχει ταυτοδύναμο στοίχειο $x\in U$ $(x^2=x\neq 0)$, που να είναι ορθογώνιο στο e, δηλαδή $xe=ex=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5. : Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι οι πίνακες:

$$x=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{και}\quad y=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

είναι ταυτοδύναμοι και ορθογώνιοι και π.χ. ο πίνακας :

$$z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=x+y$$

δεν είναι πρωτογενής, ενώ οι πίνακες x και y είναι πρωτογενείς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6 Θεωρούμε την άλγεβρα $A_{2\times 2}$ των τετραγωνικών πινάκων 2×2 με στοιχεία από το σώμα F=R ή C. Τα ταυτοδύναμα στοιχεία αυτής της άλγεβρας είναι οι πίνακες της μορφής :

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \frac{\alpha}{\beta}(1-\alpha)&1-\alpha\end{pmatrix}$$

Πράγματι : Έστω ένας τυχαίος πίνακας :

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$$

Για να είναι ο πίνακας αυτός ταυτοδύναμος πρέπει να ισχύει :

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{pmatrix}\alpha^2+\beta\gamma&\alpha\beta+\beta\delta\\ \alpha\gamma+\gamma\delta&\beta\gamma+\delta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}\;\Rightarrow\;\begin{aligned}\alpha^2+\beta\gamma&=\alpha\quad(1)\\ \alpha\beta+\beta\delta&=\beta\quad(2)\\ \alpha\gamma+\gamma\delta&=\gamma\quad(3)\\ \beta\gamma+\delta^2&=\delta\quad(4)\end{aligned}$$

Οι σχέσεις (2) και (3) είναι ισοδύναμες και δίνουν :

$$\alpha+\delta=1 \Rightarrow \delta=1-\alpha \qquad (5)$$

Από την (1) έχουμε : $\gamma=\alpha(1-\alpha)/\gamma$ (6)

Από τις σχέσεις (5) και (6) διαπιστώνουμε ότι τα ταυτοδύναμα στοιχεία της άλγεβρας $A_{2\times 2}$ είναι της μορφής :

$$e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \frac{\alpha}{\beta}(1-\alpha) & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Να βρεθεί η γενική μορφή των πινάκων $n \times n$ που είναι μεταξύ τους α) ταυτοδύναμοι, β) ορθογώνιοι, γ) πρωτογενείς και δ) κύριοι.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.9 Ορίζουμε σαν :
α) **Μεταθέτη** ,(commutator), δυο στοιχείων x και y μιας άλγεβρας U την έκφραση:

$$[x,y]_U \equiv xy-yx \tag{1.10}$$

η οποία χαρακτηρίζει κατά πόσο δυο στοιχεία δεν ικανοποιούν την ιδιότητα της μεταθετικότητας.
β) **Αντιμεταθέτη** , (anticommutator), δυο στοιχείων x και y την έκφραση:

$$\{x,y\}_U \equiv xy+yx \tag{1.11}$$

γ) **Προσεταιριστής**, (associator), τριών στοιχείων $x,y,z \in U$ την έκφραση:

$$[x,y,z]_U \equiv (xy)z-x(yz) \tag{1.12}$$

η οποία χαρακτηρίζει κατά πόσο τρία στοιχεία δεν ικανοποιούν την προσεταιριστική ιδιότητα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1. Ο προσεταιριστής [x,y,z] είναι γραμμικός ως προς x,y και z. Ισχύει δηλαδή

$$[x_1+x_2\,,y,z]=[x_1,y,z]+[x_2,y,z] \quad \text{κ.λ.π.}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10. Μια άλγεβρα U ονομάζεται **εύκαμπτη**, (flexible), όταν

$$[x,y,x]=0 \quad \forall x,y \in U \tag{1.13}$$

Εάν η χαρακτηριστική p του σώματος είναι διάφορη του 2 τότε ο **νόμος της ευκαμψίας**, (flexibility) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

$$[x,y,z]+[z,y,x]=0 \tag{1.14}$$

(Απόδειξη : Στη σχέση (1.13) θέτουμε όπου x το x+z)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.2. Όλες οι άλγεβρες που είναι μεταθετές ή αντιμεταθετές είναι εύκαμπτες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.11. Έστω U μια άλγεβρα επί του σώματος F και S_1 ,S_2 διανυσματικοί υπόχωροι της U. Με S_1, S_2 θα συμβολίζουμε τον χώρο που γεννάται από τα γινόμενα x_1x_2 με $x_1 \in S$ και $x_2 \in S$. Ένας υπόχωρος S της U ονομάζεται **υποάλγεβρα** της U εάν $SS \subseteq S$ δηλαδή ο υπόχωρος S είναι κλειστός ως προς το γινόμενο. Εάν ισχύει $SU \subseteq S$ τότε ο S καλείται **αριστερό ιδεώδες**, ενώ όταν $US \subseteq S$ ονομάζεται **δεξιό ιδεώδες**. Επίσης εάν το S είναι αριστερό και δεξιό ιδεώδες τότε το S ονομάζεται **ιδεώδες** ή **αναλλοίωτος υπόχωρος**. Ένα ιδεώδες ονομάζεται **γνήσιο ιδεώδες** (proper) εάν $S \subset U$ και $S \neq U$ (δηλαδή το S είναι γνήσιο υποσύνολο της U). Το **μηδενικό ιδεώδες** είναι το ιδεώδες που αποτελείται μόνο από το μηδενικό στοιχείο. Ένα ιδεώδες που ικανοποιεί τη σχέση $S^n=0$, όπου με S^n συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών των γινομένων $x_1 \cdots x_n$ με οποιονδήποτε τρόπο κι' αν εκτελούνται οι πολλαπλασιασμοί, ονομάζεται **μηδενοδύναμο ιδεώδες**, (nilpotent), τάξης n.

Έστω τώρα ένα ιδεώδες S μιας άλγεβρας U πάνω στο σώμα. Ορίζουμε σαν **άλγεβρα πηλίκο** U/S τον διανυσματικό χώρο των κλάσεων (cosets) με στοιχεία x+S, $x\in U$ και με πράξεις την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό που ορίζονται ως εξής:

$$(x+S)+(y+S)\equiv(x+y)+S$$
$$\lambda(x+S)\equiv\lambda x+S \tag{1.15}$$
$$(x+S)(y+S)\equiv xy+S \quad \forall x,y\in U,\ \in\forall\lambda\in F$$

Είναι προφανές ότι το πηλίκο U/S της U είναι άλγεβρα με dimU/S= dimU-dimS.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.12. Ο **Πυρήνας** (kernel), Ν μιας άλγεβρας U ορίζεται από το σύνολο των στοιχείων $g\in U$ που ικανοποιούν την σχέση:

$$N=\{\ g\in U\ /\ [g,x,y]=[x,g,y]=[x,y,g]=0\ \ \forall x,y\in U\ \}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.3. Ο πυρήνας Ν μιας άλγεβρας U αποτελεί μια προσεταιριστική υποάλγεβρα της U. Εάν η U είναι προσεταιριστική, τότε N=U

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.13. **Κέντρο**, (center) μιας άλγεβρας U είναι το σύνολο όλων των στοιχείων του πυρήνα Ν της U τα οποία μετατίθενται με όλα τα στοιχεία xεU ισχύει δηλαδή

$$C=\{c\in N\ /\ [c,x]=[x,c]=0,\ \ \forall x\in U\} \tag{1.17}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.4. Το κέντρο μιας άλγεβρας U αποτελεί μια μεταθετή και προσεταιριστική υποάλγεβρα της U η οποία είναι η μεγίστη δυνατή. Το σώμα F μιας άλγεβρας U μπορεί επίσης να είναι το κέντρο της C.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.14. Εάν σε μια άλγεβρα U θεωρήσουμε ένα γραμμικό τελεστή:

$$i : U \rightarrow U$$
$$i :\ x\in U \rightarrow i(x)=\overline{x} \tag{1.16}$$

με τις ιδιότητες:

a) $i(x+y)=i(x)+i(y)$ δηλ. $\overline{x+y}=\overline{x}+\overline{y}$

b) $i(xy)=i(x)i(y)$ δηλ. $\overline{xy}=\overline{x}\overline{y}$

c) $i(\lambda x)=\lambda^{*}i(x)$ δηλ. $\overline{\lambda\chi}=\lambda^{*}\overline{x}$

d) $i(i(x))=x$ δηλ. $\overline{\overline{x}}=x\quad \forall x,y\in U,\ \forall\lambda\in F$ (1.17)

τότε ο τελεστής i ονομάζεται **ενέλιξη**, (involution), ή **αντιαυτομορφισμός** και εύκολα μπορούμε να δούμε ότι είναι μια απεικόνιση αμφιμονοσήμαντη και επί.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.15 : Έστω ότι η άλγεβρα U είναι μια Banach άλγεβρα, δηλ. μια άλγεβρα στην οποία έχει ορισθεί μια norm ||..|| ως προς την οποία η άλγεβρα U είναι πλήρης, δηλ. κάθε ακολουθία του Cauchy συγκλίνει ως προς την μετρική $d(x,y)=\|x-y\|$. Εάν τώρα στην άλγεβρα U ορισθεί μια ενέλιξη i, η οποία πληρεί επί πλέον την ιδιότητα :

e) $\|i(x)x\| = \|x\|^2$

τότε η Banach άλγεβρα U ονομάζεται **C^*-αλγεβρα**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

α) Εάν η άλγεβρα U είναι οι μιγαδικοί αριθμοί, η πράξη της συζυγίας:

$$x+iy \rightarrow \overline{x+iy} = x-iy$$

αποτελεί ενέλιξη.

β) Εάν η άλγεβρα U είναι οι τετραγωνικοί πίνακες n×n με στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς η συνήθης ενέλιξη που μπορούμε να ορίσουμε είναι:

$$i : A=(A_{ij}) \rightarrow i(A)=A^{+}=(A_{ij}^{*})^{t}$$

δηλαδή σε κάθε πίνακα A_{ij} αντιστοιχούμε τον συζυγοανάστροφο του.

γ) Ας θεωρήσουμε έναν διαγώνιο πίνακα D με στοιχεία από την άλγεβρα U εφοδιασμένη με την ενέλιξη $i(t)=\overline{t}$

$$D = \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n \end{pmatrix}$$

και ας υποθέσουμε ότι:

i) τα διαγώνια στοιχεία t_i ανήκουν στο κέντρο της U
ii) για κάθε t_i υπάρχει το αντίστροφο στοιχείο, που ανήκει και αυτό στο κέντρο της U.
iii) τα στοιχεία t_i είναι αυτοσυζυγή σε σχέση με την ενέλιξη της U δηλαδή $\overline{t}=t$. Η απεικόνιση:

$$A \rightarrow D^{-1}AD \qquad (1.18)$$

ονομάζεται **κανονική ενέλιξη** της άλγεβρας των πινάκων με στοιχεία από την U σε σχέσει με την ενέλιξη i.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.16. Το **γινόμενο Kronecker** $P_F=U\otimes_F U'$ δυο αλγεβρών U και U' επί του σώματος F ορίζεται σαν το τανυστικό γινόμενο $U\otimes_F U'$ των διανυσματικών χώρων U και U' έτσι ώστε το γινόμενο να είναι επιμεριστικό και να ισχύει η σχέση:

$$(x\otimes_F x')(y\otimes_F y')=(xx')\otimes_F(yy') \quad \forall x,y\in U \text{ και } \forall x'y'\in U' \qquad (1.21)$$

Εάν $\dim U=n_1$ και $\dim U'=n_2$ τότε $\dim P_F =n_1n_2$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.17. Η **βαθμωτή επέκταση**, (scalar extension), U_F μιας άλγεβρας U επί του σώματος F είναι το γινόμενο Kronecker $\otimes_F U$, (κάθε σώμα F μπορεί να γίνει διανυσματικός χώρος ως προς τον εαυτό του διαστάσεως 1).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.5. Οποιαδήποτε βάση της U είναι επίσης μια βάση της U_F. Επίσης η άλγεβρα U είναι μια υποάλγεβρα της U_F με την έννοια ότι είναι ισομορφική με το γινόμενο $1\otimes U_F$ και η βαθμωτή επέκταση U_F μιας άλγεβρας U μπορεί ή όχι να ικανοποιεί τους ίδιους νόμους της U.

Έστω U μια άλγεβρα επί του σώματος F με μοναδιαίο στοιχείο e και γινόμενο xy που ικανοποιεί ένα σύνολο κανόνων. Θεωρούμε ένα στοιχείο c που έχει αντίστροφο στοιχείο c^{-1}, $(cc^{-1}=c^{-1}c=e)$ και κατασκευάζουμε μια νέα άλγεβρα U^* η οποία σαν διανυσματικός χώρος είναι ο ίδιος διανυσματικός χώρος U αλλά εφοδιασμένος με ένα νέο γινόμενο:

$$x*y=(xc)y=xcy \quad \text{ή} \quad x*y=x(cy) \quad \forall x,y\in U \text{ και } c=\text{σταθ.} \qquad (1.22)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.18. Η νέα άλγεβρα U^* ονομάζεται **ισοτοπική επέκταση**, (isotopic extension) της U, όταν το νέο γινόμενο x*y υπακούει τους ίδιους νόμους της U. Διαφορετικά θα ονομάζεται **γενοτοπική επέκταση**, (genetopic extension), της U. Εάν το c δεν έχει αντίστροφο, η άλγεβρα U^* ονομάζεται **ομοτοπική επέκταση**, (homotopic extension), της U.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.6. Εάν για το γινόμενο (1.22) μπορούμε να βρούμε μια αντιστρέψιμη απεικόνιση της $U \rightarrow U^*$ που να διατηρεί τους κανόνες του γινομένου xy τότε μιλάμε για **αλγεβρική ισοτοπία**. Εάν τώρα το νέο γινόμενο μπορεί να τροποποιηθεί και να πάρει μια πιο γενική μορφή όπως:

$$x*y=xcy+y(1-c)x \quad \text{με } c=\text{σταθ.} \qquad (1.23)$$

$$\text{ή} \qquad x*y=xcy+ydx \text{ με } c,d=\text{σταθ.} \qquad (1.24)$$

τότε μιλάμε για **αλγεβρική γενοτοπία**. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να βρούμε μια αντιστρέψιμη απεικόνιση $U \rightarrow U^*$ που επάγεται τους κανόνες του γινομένου xy με την εξής έννοια :

Έστω ότι οι δυο άλγεβρες U και U^* είναι εφοδιασμένες με γινόμενα των οποίων οι ιδιότητες (δηλ. οι κανόνες) δεν είναι ισοδύναμοι αλλά σχετίζονται με μια γενοτοπική απεικόνιση. Τότε μπορούμε να πούμε ότι η γενοτοπική αυτή απεικόνιση επάγει τους νόμους της U^* . Η έννοια της γενοτοπικής απεικόνισης θα παίξει σημαντικό ρόλο στην κατασκευή της Lie-επιδεκτής θεωρίας.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.19. Έστω μια <u>προσεταιριστική</u> άλγεβρα A επί του σώματος F χαρακτηριστικής p με γινόμενο xy. Ορίζουμε σαν **λ-μεταθετή άλγεβρα**, (λ-mutation algebra), A(λ) της A τον ίδιο διανυσματικό χώρο εφοδιασμένο με ένα νέο γινόμενο

$$x*y=\lambda xy+(1-\lambda)yx \qquad (1.25)$$

όπου λ είναι ένα σταθερό στοιχείο του σώματος F.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.7. Η νέα άλγεβρα A(λ) γενικά είναι <u>μη προσεταιριστική</u>. Εν τούτοις έχει αρκετές κοινές ιδιότητες με την A. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι η λ-μεταθετή είναι ειδική περίπτωση της γενοτοπικής απεικόνισης, όταν το στοιχείο c στις σχέσεις (1.23) και (1.24) ανήκει στο σώμα F.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.8. Η ονομασία της A(λ) άλγεβρας σαν λ-μεταθετή οφείλεται στο γεγονός ότι από τις τιμές της παραμέτρου λ προκύπτουν διάφορες άλγεβρες. Π.χ. για λ=1 έχουμε την άλγεβρα A(1) η οποία είναι ισόμορφη προς την αρχική άλγεβρα A. Για λ=0 η άλγεβρα A(0) είναι αντιισομορφική προς την A και για λ=1/2 είναι ισομορφική προς την μεταθετική άλγεβρα A^+ με γινόμενο

$$\{x,y\}=xy+yx \qquad (1.26)$$

Παρ' όλα αυτά δεν υπάρχει πεπερασμένη τιμή της παραμέτρου λ έτσι ώστε η άλγεβρα A(λ) να παράγει την αντιμεταθετική άλγεβρα A^- με γινόμενο:

$$[x,y]=xy-yx \qquad (1.27)$$

η οποία έχει φυσική ερμηνεία. Γι' αυτό εισάγουμε την **(λ,μ)-μεταθετή άλγεβρα** η οποία είναι ο ίδιος διανυσματικός χώρος όπως η A αλλά με νέο γινόμενο

$$x*y=\lambda xy+\mu yx=\rho[x,y]+\sigma\{x,y\} \qquad (1.28)$$

με λ=σ+ρ και μ=σ-ρ σταθερά στοιχεία του σώματος. Η άλγεβρα Α(λ,μ) γενικά είναι μη προσεταιριστική και είναι φανερό ότι είναι μια γενίκευση της έννοιας της αλγεβρικής γενοτοπίας. Επίσης η άλγεβρα Α(1,0) είναι ισομορφική προς την Α, η Α(1,1) ισομορφική προς την μεταθετική άλγεβρα A^+ με γινόμενο το (1.26), η Α(1,-1) είναι ισομορφική προς την άλγεβρα A^- με γινόμενο το (1.26) που είναι η κατάλληλη πραγμάτωση (realization) των Lie αλγεβρών στην Κβαντομηχανική. Έτσι οι άλγεβρες Α(λ,μ) θα παίξουν ένα βασικό ρόλο στην κατασκευή των Lie-επιδεκτών αλγεβρών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.9. Αν και οι άλγεβρες Α(λ) και Α(λ,μ) έχουν κάποιες διαφορές, έχουν όμως και αρκετές ομοιότητες και αυτό γιατί είναι αλγεβρικές ισοτοπίες. Πράγματι από το γινόμενο x*y της Α(λ,μ) έχουμε

$$x*y=\lambda xy+\mu yx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(\lambda+\mu)xy+\frac{\mu}{\lambda+\mu}(\lambda+\mu)yx \qquad (1.29)$$

Εάν θέσουμε $\lambda/(\lambda+\mu)=\lambda'$ τότε $1-\lambda'=\mu/(\lambda+\mu)$ οπότε η σχέση (1.25) γράφεται:

$$x*y=\lambda' x^\circ y+(1-\lambda')y^\circ x \qquad (1.30)$$

όπου $x^\circ y=(\lambda+\mu)xy$ με $\lambda\neq-\mu$

2. LIE-ΑΛΓΕΒΡΕΣ

Οι προσεταιριστικές άλγεβρες αποτελούν μια μεγάλη κατηγορία αλγεβρών που βρίσκουν πολλές εφαρμογές και των οποίων η μελέτη δεν παρουσιάζει μεγάλες δυσκολίες. Από την άλλη πλευρά οι μη προσεταιριστικές άλγεβρες, για τις οποίες δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα $(xy)z=x(yz)$, δεν παρουσιάζουν γενικά ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Εάν όμως μια μη προσεταιριστική άλγεβρα εφοδιαστεί με κάποιες επιπρόσθετες ιδιότητες, τότε αυτή μπορεί να εμφανίσει πλούσια χαρακτηριστικά που μπορούν ακόμα να οδηγήσουν σε κάποια ενδιαφέρουσα θεωρία.

Είναι προφανές ότι όλες οι ιδιότητες και τα θεωρήματα, που ισχύουν στις προσεταιριστικές άλγεβρες και είναι ανεξάρτητα από την προσεταιριστική ιδιότητα, μεταφέρονται και στις μη προσεταιριστικές άλγεβρες.

Η πιο γνωστή κατηγορία μη προσεταιριστικών αλγεβρών είναι εκείνες των **Lie αλγεβρών**. Η σημασία των Lie αλγεβρών, όχι μόνο στα μαθηματικά αλλά και στη φυσική, είναι θεμελιώδης. Ο συνδετικός κρίκος των Lie αλγεβρών με τη θεωρητική φυσική οφείλεται στο γεγονός ότι ο νόμος της χρονικής εξέλιξης ενός φυσικού συστήματος, που προκύπτει από τις εξισώσεις του Hamilton, ικανοποιεί τα αξιώματα των Lie αλγεβρών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1 Έστω μια άλγεβρα L επί του σώματος F χαρακτηριστικής p. Εάν το γινόμενο xy ικανοποιεί τις σχέσεις

$$x^2=0 \tag{2.1}$$

$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=0 \tag{2.2}$$

τότε η άλγεβρα L ονομάζεται **Lie-άλγεβρα**.

Από τη σχέση (2.1) προκύπτει ότι μια Lie άλγεβρα είναι μηδενοδύναμη τάξης 2.

Θέτοντας στη σχέση (2.1) όπου x το x+y προκύπτει :

$$0=(x+y)^2=x^2+xy+yx+y^2=xy+yx$$

δηλαδή
$$xy=-yx \tag{2.1α}$$

Η σχέση (2.1α) ονομάζεται **αντιμεταθετική ιδιότητα** ενώ η (2.2) **ταυτότητα του Jacobi**.

Η αντιμεταθετική ιδιότητα (2.1α) ισχύει σε κάθε Lie άλγεβρα. Εάν τώρα ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα και η άλγεβρα L είναι χαρακτηριστικής $p\neq 2$, τότε ισχύει η (2.1). Πράγματι εάν θέσουμε x=y στην (2.1α) προκύπτει $xx=-xx \Rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow x=0$, (αφού $p\neq 2$). Επομένως για άλγεβρες χαρακτηριστικής $p\neq 2$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (2.1α) αντί της (2.1) για τον ορισμό της Lie άλγεβρας. Αυτό συμβαίνει σχεδόν πάντα στη Φυσική όπου οι άλγεβρες που χρησιμοποιούνται είναι πραγματικές ή μιγαδικές και τα σώματα των πραγματικών και μιγαδικών αριθμών έχουν χαρακτηριστική μηδέν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.2. Μια άλγεβρα J επί του σώματος F με γινόμενο xy που ικανοποιεί τις σχέσεις

$$xy=yx \tag{2.3}$$

$$[x^2,y,x] = (x^2y)x-x^2(yx)=0 \tag{2.4}$$

ονομάζεται **μεταθετική Jordan άλγεβρα**. Η σχέση (2.3) ονομάζεται **μεταθετική ιδιότητα** ενώ η (2.4) **ιδιότητα του Jordan**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. Εάν αντί της σχέσης (2.3) ισχύει η εύκαμπτη, (flexible), ιδιότητα:

$$(xy)x=x(yx) \qquad (2.5)$$

τότε η άλγεβρα J ονομάζεται **μη μεταθετική Jordan άλγεβρα**, και συμβολίζεται με $\tilde{J}$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4. Έστω P μια προσεταιριστική άλγεβρα. Εισάγουμε μια επί πλέον εσωτερική πράξη, που θα την ονομάζουμε **Poisson-παρένθεση** και θα την συμβολίζουμε με $[x,y]_P$. Θεωρούμε ότι η Poisson-παρένθεση ικανοποιεί τις ιδιότητες :

1) $[x,x]_P = 0$
2) $[x,(y+z)]_P = [x,y]_P + [x,z]_P$ και $[(x+y),z]_P = [x,z]_P + [y,z]_P$
3) $\lambda[x,y]_P = [\lambda x,y]_P = [x,\lambda y]_P$
4) $[x,yz]_P = [x,y]_P z + y[x,z]_P \qquad \forall x,y,z \in P\ ,\ \forall \lambda \in F$

Η άλγεβρα P με τον νέο νόμο συνθέσεως ονομάζεται **Poisson-άλγεβρα**.

Από τις δυο πρώτες ιδιότητες εύκολα προκύπτει ότι :

$$[x,y]_P = -[y,x]_P$$

και ότι ισχύει η ταυτότητα του Jacobi. Επομένως μια Poisson άλγεβρα είναι και Lie-άλγεβρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1 Έστω P το σύνολο των απείρως παραγωγισίμων συναρτήσεων f(x,y) δυο μεταβλητών. Το σύνολο αυτό P αποτελεί μια προσεταιριστική άλγεβρα με νόμους εσωτερικής συνθέσεως το άθροισμα και το γινόμενο δυο συναρτήσεων :

$$(f+g)(x,y) = f(x,y)+g(x,y)$$
$$(fg)(x,y) = f(x,y)g(x,y)$$

και με εξωτερικό νόμο συνθέσεως τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό :

$$(\lambda f)(x,y) = \lambda f(x,y)$$

Ορίζουμε τώρα σαν **Poisson-παρένθεση** την έκφραση :

$$[f,g]_P \equiv \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

η οποία, όπως εύκολα προκύπτει, ικανοποιεί τις ιδιότητες μιας Poisson παρένθεσης όπως επίσης και την ταυτότητα του Jacobi. Η Poisson αυτή άλγεβρα, η οποία αποτελεί την μαθηματική έκφραση της κλασικής Μηχανικής, διότι εκφράζει τον νόμο της χρονικής εξέλιξης ενός φυσικούς συστήματος, είναι και Lie άλγεβρα, η οποία όμως δεν ορίζεται, όπως συνήθως, με την βοήθεια ενός μεταθέτη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1 Όπως είναι γνωστό η Lie άλγεβρα αναμφίβολα έχει μεγάλη φυσική σημασία. Την ίδια εμφανή σημασία δεν έχει ακόμη η Jordan άλγεβρα. Είναι πολύ πιθανό να έχουμε μια διαφορετική εμβάθυνση της Jordan άλγεβρας από την Lie-επιδεκτή προσέγγιση των φυσικών συστημάτων. Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια η Lie-επιδεκτή άλγεβρα δεν περιέχει μόνο την έννοια της Lie άλγεβρας αλλά επίσης την έννοια της μεταθετής Jordan άλγεβρας. Πράγματι οι δυο αυτές άλγεβρες μερικές φορές εμφανίζονται στις ίδιες περιοχές της θεωρίας των αφηρημένων αλγεβρών.

Για την μελέτη αυτών των αλγεβρών αυτό που πρέπει πρώτα να εξετάσουμε είναι η πραγμάτωση, (realization), του γινομένου σε σχέση με το προσεταιριστικό γινόμενο.

Ας θεωρήσουμε μια προσεταιριστική άλγεβρα A πάνω σ' ένα σώμα F χαρακτηριστικής <u>μηδέν</u> με γινόμενο xy.

α) Μια πραγμάτωση του γινομένου της Lie-άλγεβρας με την βοήθεια του προσεταιριστικού γινομένου xy είναι:

$$[x,y]=xy-yx \qquad (2.6)$$

Το νέο αυτό γινόμενο δημιουργεί την Lie άλγεβρα A^- η οποία συμπίπτει με την A σαν διανυσματικός χώρος αλλά είναι εφοδιασμένη με το γινόμενο (2.6).

β) Μια πραγμάτωση του γινομένου της μεταθετικής Jordan άλγεβρας δίνεται από την σχέση:

$$\{x,y\}=\frac{1}{2}(xy+yx) \qquad (2.7)$$

Το νέο αυτό γινόμενο χαρακτηρίζει μια μεταθετική Jordan άλγεβρα A^+ η οποία συμπίπτει με την A σαν διανυσματικός χώρος αλλά είναι εφοδιασμένη με το γινόμενο (2.7).

γ) Μια πραγμάτωση του γινομένου της μη μεταθετικής Jordan άλγεβρας $\tilde{J}$ δίνεται από τη σχέση:

$$x*y=\lambda xy+(1-\lambda)yx \qquad (2.8)$$

Το νέο γινόμενο χαρακτηρίζει την λ-μεταθετή άλγεβρα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα γινόμενα (2.6), (2.7) και (2.8) είναι επιμεριστικά ως προς την πρόσθεση. Επίσης οι άλγεβρες L (Lie-άλγεβρα), J (Jordan-άλγεβρα) και $\tilde{J}$ (μη μεταθετική Jordan άλγεβρα), όπως και οι πραγματώσεις τους A^-, A^+ και A(λ) είναι μη προσεταιριστικές.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.3. Τα γινόμενα που ορίζονται από τις σχέσεις (2.6) και (2.7) προέρχονται από προσεταιριστική άλγεβρα, ενώ οι εκφράσεις των μεταθετών και αντιμεταθετών (1.10) και (1.11) μπορούν να ορισθούν συναρτήσει του γινομένου xy, το οποίο μπορεί και να μην είναι προσεταιριστικό.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.4. Όπως θα δούμε αργότερα το θεώρημα Poincre-Birkhoff-Witt μας διαβεβαιώνει ότι κάθε Lie άλγεβρα L είναι ισομορφική με μια υποάλγεβρα κάποιας άλγεβρας A^-. Πιο απλά μπορούμε να πούμε ότι κάθε Lie- άλγεβρα μπορεί να παρασταθεί με την βοήθεια του γινομένου (2.6).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.5. Η κατάσταση για τις Jordan άλγεβρες J και $\tilde{J}$ είναι διαφορετική. Σ' αυτήν την περίπτωση δεν υπάρχει ανάλογο του θεωρήματος Poincare-Birkhoff-Witt. Π.χ. μια μεταθετή Jordan άλγεβρα δεν δέχεται κατ' ανάγκη μια πραγμάτωση με την βοήθεια του γινομένου (2.7), δηλ. δεν είναι ισομορφική με μια υποάλγεβρα κάποιας άλγεβρας A^+. Όταν μια τέτοια πραγμάτωση υπάρχει τότε μιλάμε για **ειδικές** (special) άλγεβρες Jordan διαφορετικά έχουμε τις **κατ' εξαίρεση**, (exceptional), άλγεβρες Jordan.

Ένα από τα κεντρικά προβλήματα για την μελέτη οποιασδήποτε άλγεβρας είναι το πρόβλημα της ταξινόμησης, η οποία απαιτεί την ταυτοποίηση των ριζικών, (radicals), τον χαρακτηρισμό των ημιαπλών αλγεβρών και την αναγωγή των αλγεβρών σε ευθύ άθροισμα των απλών αλγεβρών.

Για απλότητα εδώ θα περιοριστούμε στις περιπτώσεις των αλγεβρών οι οποίες ορίζονται πάνω σε σώματα χαρακτηριστικής μηδέν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.5. Μια άλγεβρα U ονομάζεται **απλή** ,(simple), εάν και μόνο εάν το μόνο γνήσιο ιδεώδες της U είναι το μηδενικό ιδεώδες και $U^2 \neq 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.6. Η έννοια της απλής άλγεβρας εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε (μη προσεταιριστική) άλγεβρα και επομένως στις Lie και Jordan άλγεβρες. Ας σημειώσουμε ότι για οποιαδήποτε άλγεβρα U το U^2 είναι ένα ιδεώδες της U. Όμως εάν η U είναι απλή τότε $U^2 = U$.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια προσεταιριστική άλγεβρα A πεπερασμένης διάστασης. Στην περίπτωση αυτή εάν S είναι ένα μηδενοδύναμο ιδεώδες της A και η άλγεβρα πηλίκο A/S είναι μηδενοδύναμο τότε η A είναι μηδενοδύναμη. Επίσης εάν S_1 και S_2 είναι μηδενοδύναμα ιδεώδη τότε και το S_1+S_2 είναι μηδενοδύναμο ιδεώδες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6. Οι παραπάνω ιδιότητες υπονοούν την ύπαρξη ενός μοναδικού μέγιστου μηδενοδύναμου ιδεώδους R της άλγεβρας A το οποίο ονομάζεται **ριζικό** (radical) της A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.7. Μια πεπερασμένης διάστασης προσεταιριστική άλγεβρα A ονομάζεται **ημιαπλή** (semisimple) όταν το ριζικό της είναι το μηδενικό ιδεώδες ή ισοδύναμα όταν δεν υπάρχει γνήσιο αβελιανό ιδεώδες.

Για την ταξινόμηση των αλγεβρών αυτών ιδιαίτερη σημασία έχει το **θεώρημα Wedderburn** :

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. Εάν R είναι το ριζικό μιας, πεπερασμένης διάστασης, προσεταιριστικής άλγεβρας A πάνω σ' ένα σώμα χαρακτηριστικής μηδέν, τότε η άλγεβρα πηλίκο A/R είναι μια ημιαπλή προσεταιριστική άλγεβρα. Οποιαδήποτε ημιαπλή προσεταιριστική άλγεβρα A εκφράζεται κατά μοναδικό τρόπο σαν ευθύ άθροισμα των ιδεωδών $S_1,S_2,..,S_n$, δηλαδή

$$A = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i \tag{2.9}$$

κάθε ένα από τα οποία είναι απλή προσεταιριστική άλγεβρα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.7. Στην περίπτωση μιας μη προσεταιριστικής άλγεβρας ο χαρακτηρισμός του ριζικού πρέπει να συμπληρωθεί κατάλληλα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο μη προσεταιριστικός χαρακτήρας της άλγεβρας αποδίδει διφορούμενα την έννοια της nilpotency, εκτός αν ορισθεί κατάλληλα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.9. Μια μη προσεταιριστική, (και όχι κατ' ανάγκη προσεταιριστική κατά δύναμη, power associative), άλγεβρα U ονομάζεται **αδύναμη** (nilpotent) **άλγεβρα τάξης n** εάν υπάρχει ακέραιος θετικός n τέτοιος ώστε όλα τα δυνατά γινόμενα από n στοιχεία της U είναι μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι το U^n, που είναι ο γραμμικός υπόχωρος που γεννάται από το σύνολο $\{x_1,x_2,...,x_n\}$, είναι ο μηδενικός υπόχωρος 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2. Μια άλγεβρα U είναι μηδενοδύναμη (nilpotent) τάξης 3 όταν ισχύει:

$$x(yz)=(xy)z=0$$

όπως επίσης

$$(xy)z=(yz)x=(zx)y=z(xy)=x(yz)=y(zx)=$$
$$=(yx)z=(zy)x=(xz)y=z(yx)=x(zy)=y(xz)=0$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.10. Από την άλγεβρα U κατασκευάζουμε την εξής ακολουθία ιδεωδών :

$$U^{(1)}=UU,\ U^{(2)}=U^{(1)}U^{(1)}, \cdots, U^{(n)}=U^{(n-1)}U^{(n-1)}, \cdots$$

για τα οποία ισχύει :

$$U \supset U^{(1)} \supset U^{(2)} \supset \cdots \supset U^{(n)} \supset \cdots$$

Εάν για την ακολουθία ιδεωδών $U^{(n)}$ υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε $U^{(n)}=0$ η άλγεβρα U ονομάζεται **επιλύσιμη** (solvable)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.8. Ο ορισμός του ριζικού μιας προσεταιριστικής άλγεβρας δεν επεκτείνεται στις Lie άλγεβρες γιατί αυτές είναι μηδενικές άλγεβρες (nilalgebra) δείκτου (index) 2, ισχύει δηλαδή:

$$x^2=0 \quad \forall x\in L$$

Όμως η έννοια της **επιλυσιμότητας** (solvability) μιας μη προσεταιριστικής άλγεβρας επεκτείνεται στις Lie άλγεβρες. Έτσι μπορούμε να πούμε ότι :

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.11. Σαν **ριζικό** μιας πεπερασμένων διαστάσεων Lie άλγεβρας L ορίζεται το μοναδικό μέγιστο επιλύσιμο ιδεώδες της L.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12. Μια άλγεβρα L ονομάζεται **ημιαπλή** όταν το ριζικό της είναι το μηδενικό ιδεώδες.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.9. Εάν μια Lie άλγεβρα L είναι επιλύσιμη δείκτου n, ισχύει δηλαδή $L^{(n)}=0$ τότε η $L^{(n-1)}$ είναι αβελιανή. Αυτό σχετίζεται με κάποιον άλλο ορισμό της ημιαπλής Lie άλγεβρας ο οποίος χρησιμοποιείται επίσης στη φυσική βιβλιογραφία σύμφωνα με την οποία μια Lie άλγεβρα L είναι ημιαπλή όταν δεν περιέχει κανένα αβελιανό ιδεώδες εκτός από το μηδενικό.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.2. Εάν R είναι το ριζικό μιας πεπερασμένων διαστάσεων Lie άλγεβρας L πάνω σ' ένα σώμα χαρακτηριστικής μηδέν, τότε η νέα άλγεβρα πηλίκο L/R είναι μια ημιαπλή Lie άλγεβρα. Οποιαδήποτε ημιαπλή άλγεβρα L μπορεί κατά μοναδικό τρόπο να εκφρασθεί σαν το ευθύ άθροισμα των ιδεωδών $S_1, S_2,...,S_n$ δηλ.

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i \tag{2.10}$$

καθένα από τα οποία είναι μια απλή άλγεβρα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.10. Στην απλή περίπτωση των μεταθετών Jordan αλγεβρών J οι έννοιες είναι οι ίδιες. Συγκεκριμένα η έννοια της επιλυσιμότητας είναι ακριβώς η ίδια όπως και στις Lie άλγεβρες και το ριζικό μιας μεταθετής Jordan άλγεβρας J ορίζεται σαν το μοναδικό μέγιστο επιλύσιμο ιδεώδες της J. Μια ημιαπλή άλγεβρα J είναι και εδώ μια άλγεβρα της οποίας το ριζικό είναι το μηδενικό ιδεώδες.

Και εδώ ισχύει το εξής Θεώρημα, (δεχόμαστε ότι η χαρακτηριστική του σώματος είναι $p\neq 2$):

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.3. Εάν R είναι το ριζικό μιας πεπερασμένης διάστασης μεταθετής Jordan άλγεβρας, πάνω σ' ένα σώμα χαρακτηριστικής μηδέν, τότε η άλγεβρα πηλίκο J/R είναι μια ημιαπλή, μεταθετή Jordan άλγεβρα. Οποιαδήποτε ημιαπλή άλγεβρα J μπορεί κατά μοναδικό τρόπο να εκφρασθεί σαν το ευθύ άθροισμα των ιδεωδών $S_1, S_2, \cdots, S_n$ δηλαδή

$$J = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i \qquad (2.11)$$

καθένα από τα οποία είναι μια απλή μεταθετή Jordan άλγεβρα.

Η περίπτωση μιας μη μεταθετής Jordan άλγεβρας $\tilde{J}$ είναι κάπως διαφορετική. Το ριζικό εδώ ορίζεται σαν το μοναδικό μέγιστο μηδενικό, (maximal nil), ιδεώδες της $\tilde{J}$ και η ημιαπλή άλγεβρα $\tilde{J}$ σαν την άλγεβρα της οποίας το ριζικό είναι το μηδενικό ιδεώδες (zero ideal). Το παρακάτω θεώρημα ισχύει για $p\neq 2,3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.4. Εάν R είναι το ριζικό μιας πεπερασμένων διαστάσεων μη μεταθετής Jordan άλγεβρας $\tilde{J}$ πάνω σ' ένα σώμα χαρακτηριστικής μηδέν, τότε η άλγεβρα πηλίκο $\tilde{J}/R$ είναι μια απλή μη μεταθετή Jordan άλγεβρα. Οποιαδήποτε ημιαπλή άλγεβρα $\tilde{J}$ μπορεί κατά μοναδικό τρόπο να εκφρασθεί σαν το ευθύ άθροισμα των ιδεωδών $S_1, S_2, \cdots, S_n$ δηλαδή

$$\tilde{J} = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i \qquad (2.12)$$

καθένα από τα οποία είναι μια απλή μεταθετή Jordan άλγεβρα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.11. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν ειδικά για άλγεβρες πεπερασμένων διαστάσεων πάνω σε σώμα χαρακτηριστικής μηδέν. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι δεν υπάρχει αντίφαση μεταξύ του ορισμού του ριζικού μιας Lie άλγεβρας μιας μεταθετής Jordan άλγεβρας και μιας προσεταιριστικής άλγεβρας και αυτό γιατί όπου ισχύει η ιδιότητα της προσεταιριστικότητας, οι έννοιες του αδύναμου ιδεώδους, (nilpotent ideal), και του επιλύσιμου ιδεώδους συμπίπτουν. Επίσης ο ορισμός του ριζικού μιας μη μεταθετής Jordan άλγεβρας ευθυγραμμίζεται περισσότερο με εκείνο μιας προσεταιριστικής άλγεβρας από ότι μιας Lie άλγεβρας.

Τα συμπεράσματα για την ταξινόμηση των αλγεβρών περιληπτικά έχουν ως εξής :

I. Ταξινόμηση των απλών Lie αλγεβρών

IA. Άλγεβρες σε σώμα χαρακτηριστικής p=0

1) Κλασσικές άλγεβρες A,B,C,D
2) Κατ' εξαίρεση (exceptional) άλγεβρες G_2, F_4, E_6, E_7, E_8

IB. Άλγεβρες σε σώμα χαρακτηριστικής p≠0

Η μελέτη των απλών Lie αλγεβρών δεν έχει κλείσει ακόμη. Μπορούμε όμως να καταγράψουμε τις εξής άλγεβρες..

1) p-διαστάσεων άλγεβρες (Witt)
2) p^n-διαστάσεων άλγεβρες (Zassenhauss)
3) np^n-διαστάσεων άλγεβρες (Jacobson)
4) rp^n-διαστάσεων άλγεβρες (Kaplansky)
5) $(n-1)(p^n-1)$-διαστάσεων άλγεβρες (Frank)
6) T_n, V_m, L_0 και L άλγεβρες (Albert και Frank)

7) L(T,δ,F) άλγεβρες (Bloch)

ΙΙ. Ταξινόμηση απλών μεταθετών Jordan αλγεβρών.

ΙΙΑ. Άλγεβρες σε σώμα χαρακτηριστικής p=0

Το πρόβλημα της ταξινόμησης των απλών αλγεβρών μπορεί να αναχθεί, σ' αυτή την περίπτωση, σε εκείνη των **κεντρικών απλών αλγεβρών** δηλαδή των απλών αλγεβρών των οποίων το **κεντροειδές**[2] (centroid) είναι το βασικό σώμα, (base field).

Μια κεντρική απλή μεταθετή Jordan άλγεβρα ονομάζεται **ανηγμένη** (induced) **Jordan άλγεβρα** εάν περιέχει ένα μοναδιαίο (identity) στοιχείο $1=\sum_{i=1}^{n} e_i$ όπου τα e_i είναι αρχικά (primitive) ορθογώνια idempotends. Το n ονομάζεται βαθμός της J. Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε ανηγμένη απλή μεταθετή Jordan άλγεβρα J είναι κεντρική απλή και ότι μια βαθμωτή επέκταση μιας κεντρικής απλής μεταθετής Jordan άλγεβρας είναι μια ανηγμένη απλή άλγεβρα.

Επομένως το πρόβλημα της ταξινόμησης των απλών μεταθετών Jordan αλγεβρών μπορεί να αναχθεί σε εκείνο των ανηγμένων απλών αλγεβρών J_n^N βαθμού n και διαστάσεως N πάνω στο σώμα F. Τότε ισχύει η εξής ταξινόμηση :

Βαθμός n=1 Στην περίπτωση αυτή η ανηγμένη απλή άλγεβρα είναι η J=eF όπου e είναι η μονάδα του σώματος F. Οι άλγεβρες αυτές ονομάζονται ειδικές (special).

Βαθμός n=2 Εδώ οι ανηγμένες απλές άλγεβρες J_2^N είναι εκείνες που χαρακτηρίζονται από μια συμμετρική διγραμμική μορφή (x,y) οριζομένη πάνω σε έναν διανυσματικό χώρο V έτσι ώστε:

α) Η διγραμμική μορφή είναι μη εκφυλισμένη στον V

β) Υπάρχει ένα στοιχείο $x \in V$ τέτοιο ώστε (x,y)=1

γ) dim V_F=N>2

Οι άλγεβρες αυτές είναι ειδικές Jordan άλγεβρες.

Βαθμός n>3 Στην περίπτωση αυτή κάθε ανηγμένη απλή Jordan άλγεβρα J_n^N είναι ισομορφική προς μια Jordan άλγεβρα J(D_n ,T) όπου D_n είναι μια **εναλλακτική**[3], (alternative), άλγεβρα, η οποία μπορεί να είναι προσεταιριστική για n>4 και T είναι μια κανονική ενέλιξη.

Η άλγεβρα J(D_n,T) είναι ο διανυσματικός χώρος

$$J(D_n,T)=\{x \,/\, x\in D_n\,,\quad x=T^{-1}x'\,T\} \qquad (2.13)$$

όπου $x \to x'$ είναι η συνήθης ενέλιξη στην D_n εφοδιασμένη με το γινόμενο

$$x.y=\frac{1}{2}(xy+yx) \qquad (2.14)$$

Ισχύει τότε η εξής ταξινόμηση:

---

[2] α) Το **κέντρο C μιας άλγεβρας A** ορίζεται από την σχέση $C=\{c\in A \,/\, cx=xc \quad \forall \in A\}$

β) Το **κέντρο C μιας Lie άλγεβρας L** ορίζεται από την σχέση $C=\{c\in L \,/\, [c,x]=0 \quad \forall \in L\}$

[3] Μια άλγεβρα A πάνω σ' ένα σώμα F χαρακτηριστικής p λέγεται **εναλλακτική** όταν ικανοποιεί την δεξιά και αριστερή εναλλακτική ιδιότητα δηλ. $\alpha^2 y=\alpha(\alpha y)$ και $y\alpha^2=(y\alpha)\alpha$ $\forall \alpha,y\in A$

Α) Η άλγεβρα D_n είναι ισομορφική προς το πεδίο F. Η ενέλιξη Τ είναι σ' αυτή την περίπτωση η ταυτοτική απεικόνιση και η άλγεβρα $J(D_n,T)$ αποτελείται από τους συμμετρικούς πίνακες $n\times n$ με στοιχεία από το σώμα F. Το Ν είναι $N=2n(n+1)$

Β) Η άλγεβρα D_n είναι ισομορφική προς την άλγεβρα των γενικευμένων μιγαδικών αριθμών e πάνω στο σώμα F με βάση $\{1,e\}$ όπου $e^2=\mu 1$ με $\mu\neq 0$. Η άλγεβρα αυτή περιέχει σαν ειδική περίπτωση τους μιγαδικούς αριθμούς C. Η ενέλιξη Τ ορίζεται από τη σχέση

$$x+ye \to x-ye$$

Η άλγεβρα τώρα $J(D_n,T)$ δίνεται από την άλγεβρα των πινάκων $n\times n$ με στοιχεία από την άλγεβρα των **γενικευμένων μιγαδικών αριθμών C**. Οι πίνακες αυτοί είναι Τ-ερμιτιανοί δηλαδή $X=TX'T$ (αυτοσυζυγείς- self adjoint για την περίπτωση των μιγαδικών αριθμών). Το Ν είναι $N=n^2$.

Γ) Η άλγεβρα D_n είναι ισομορφική προς την 4 διαστάσεων άλγεβρα των **γενικευμένων quaternions Q(F)** οι οποίοι κατασκευάζονται από τους συνήθεις quaternions κατά τρόπο όμοιο με εκείνο της περίπτωσης (Β). Τα στοιχεία της άλγεβρας $J(D_n,T)$ είναι οι Τ-ερμιτιανοί πίνακες 2nx2n με στοιχεία γενικευμένους quaternions. Το Ν είναι $N=2n^2-n$.

Δ). Η άλγεβρα D_n είναι ισομορφική προς την 8 διαστάσεων άλγεβρα των γενικευμένων quaternios Q(F). Ο μόνος δυνατός βαθμός εδώ είναι n=3 και τα στοιχεία της άλγεβρας $J(D_3,T)$ είναι οι 3×3 πίνακες Χ με στοιχεία γενικευμένα octonions. Οι πίνακες Χ ικανοποιούν την σχέση $X=T^{-1}X'\,T$ με $X\to X'$ η συνήθης εννέλιξη και Τ η κανονική ενέλιξη της άλγεβρας Q(F). Το Ν εδώ είναι N=27

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.10. Οι άλγεβρες (Α), (Β) και (Γ) είναι ειδικές (special) απλές Jordan άλγεβρες ενώ μόνο η άλγεβρα (Δ) δηλαδή η J_3^8 είναι exceptional. Αυτό σημαίνει ότι το γινόμενο X.Y της (2.14) είναι προσεταιριστικό για τις περιπτώσεις (Α), (Β) και (Γ) ενώ μη προσεταιριστικό για την περίπτωση (Δ).

ΙΙ Β <u>Άλγεβρες πάνω σε σώμα χαρακτηριστικής p≠0</u>.
Η ταξινόμηση ΙΙΑ επεκτείνεται στην περίπτωση ενός σώματος F με χαρακτηριστική $p\neq 2$ χωρίς να εμφανιστούν νέες άλγεβρες.

ΙΙΙ Ταξινόμηση απλών μη μεταθετών Jordan αλγεβρών.

ΙΙΙ Α: <u>Άλγεβρες σε σώμα χαρακτηριστικής p=0</u>

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

α) Τις μεταθετές Jordan άλγεβρες της ταξινόμησης ΙΙΑ

β) τις Flexible quadratic μη προσεταιριστικού τύπου (που θα δούμε αργότερα)

ΙΙΙ Β: <u>Άλγεβρες σε σώμα χαρακτηριστικής p≠0</u>

Η ταξινόμηση ΙΙΙΑ επεκτείνεται στην περίπτωση που $p>0$ και $p\neq 2$. Στην περίπτωση αυτή εμφανίζονται νέες απλές άλγεβρες όπως η nxn απλή nodal μη μεταθετή Jordan άλγεβρα J με τις ιδιότητες:

1) κάθε στοιχείο $x\in \tilde{J}$ μπορεί να γράφει υπό την μορφή $x=\alpha 1+z$ με $1\in F$ και z nilpotent

2) το σύνολο Ν των nilpotent στοιχείων z δεν είναι υποάλγεβρα της $\tilde{J}$

3) Το σώμα F είναι (αναγκαστικά) χαρακτηριστικής $p>0$.

4) Η $\tilde{J}$ μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

Έστω P_n ο δακτύλιος των trancated πολυωνύμων σε n nilpotent στοιχεία $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$, $x_i^p=0$ εφοδιασμένος με το μερικό διαφορικό τελεστή $\frac{\partial}{\partial x_i}$ Έστω x.y το μεταθετό προσεταιριστικό γινόμενο στον δακτύλιο P. Η άλγεβρα $\tilde{J}$ είναι ο ίδιος ο P_n σαν διανυσματικός χώρος αλλά εφοδιασμένος με το γινόμενο

$$xy=x\cdot y+\frac{\partial x}{\partial x_i}\frac{\partial y}{\partial x_j}C_{ij} \tag{2.15}$$

5) τουλάχιστον ένα στοιχείο C_{ij} έχει αντίστροφο και

$$C_{ij}=\frac{1}{2}[x\ ,x\ ]_{pn} \tag{2.16}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.12. Οι μεταθετές Jordan άλγεβρες εμφανίζονται στην ταξινόμηση των μη μεταθετών Jordan αλγεβρών. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η flexible ιδιότητα περιέχει την μεταθετή ιδιότητα. Επομένως κάθε πραγμάτωση του γινομένου που ικανοποιεί τα αξιώματα (2.3) και (2.4) ικανοποιεί επίσης το αξίωμα (2.5). Όμως οι Lie άλγεβρες δεν εμφανίζονται στην ταξινόμηση των μεταθετών και μη μεταθετών Jordan αλγεβρών. Αυτό δεν απαγορεύει να υπάρχει μια σχέση μεταξύ των Lie και Jordan αλγεβρών.

3. LIE-ΕΠΙΔΕΚΤΕΣ ΑΛΓΕΒΡΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. Έστω U μια άλγεβρα επί του σώματος F χαρακτηριστικής p εφοδιασμένη με ένα (γενικό) γινόμενο ab. Θεωρούμε τώρα την προσηρτημένη άλγεβρα U^- η οποία είναι ο διανυσματικός χώρος στον οποίο ορίζεται η U αλλά εφοδιασμένη με το γινόμενο

$$[a,b]_U = ab-ba \qquad (3.1)$$

Εάν με το γινόμενο (3.1) η U^- είναι Lie άλγεβρα τότε ονομάζουμε την αρχική άλγεβρα U **Lie-επιδεκτή άλγεβρα**, (Lie-admissible).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1. Εάν το γινόμενο ab είναι προσεταιριστικό τότε το γινόμενο (3.1) ικανοποιεί πάντα τις ιδιότητες της Lie άλγεβρας και η άλγεβρα U είναι πάντα Lie-επιδεκτή. Επομένως οι προσεταιριστικές άλγεβρες είναι οι θεμελιώδεις Lie-επιδεκτές άλγεβρες. Τι γίνεται όμως όταν το γινόμενο ab είναι μη προσεταιριστικό; Και σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να έχουμε Lie-επιδεκτή άλγεβρα αρκεί η έκφραση ab-ba να ικανοποιεί τις ιδιότητες της Lie παρένθεσης.

Οι Lie-επιδεκτές άλγεβρες μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

I. Γενικές Lie-επιδεκτές άλγεβρες είναι όλες οι άλγεβρες U επί του σώματος F χαρακτηριστικής p με τις εξής ιδιότητες:

1) $[a,b]_U+[b,a]_U=0 \qquad (3.2a)$
2) $[a,b,c]_U+[b,c,a]_U+[c,a,b]_U=[c,b,a]_U+[b,a,c]_U+[a,c,b] \quad \forall a,b,c\in U \qquad (3.2b)$

όπου $[a,b,c]=(ab)c-a(bc)$ και ονομάζεται **προσεταιριστής**.

Η σχέση (3.2b) είναι η ταυτότητα του Jacobi γραμμένη συναρτήσει του γινομένου ab, δηλαδή

$$[[a,b]_U,c]_U+[[b,c]_U,a]_U+[[c,a]_U,b]_U=0 \qquad (3.3)$$

Η εξίσωση (3.2b) θα ονομάζεται **γενική Lie-επιδεκτή ιδιότητα**.

II. Εύκαμπτη,(flexible), Lie-επιδεκτές άλγεβρες είναι όλες οι άλγεβρες U επί του σώματος F με τις εξής ιδιότητες:

1) $[a,b,a]_U =0 \qquad (3.4a)$
2) $[a,b,c]_U+[b,c,a]_U+[c,a,b]_U=0 \quad \forall a,b,c\in U \qquad (3.4b)$

Η σχέση (3.4b) είναι η γενική Lie-επιδεκτή συνθήκη για την flexible ιδιότητα και θα ονομάζεται **εύκαμπτη Lie-ιδιότητα**. Η ιδιότητα αυτή είναι μια ασθενέστερη μορφή της προσεταιριστικής ιδιότητας.

III. Lie-άλγεβρες. Από την συνθήκη της αντιμεταθετικότητας των ιδιοτήτων του γινομένου οι σχέσεις (3.2) ανάγονται στις

$$ab+ba=0 \qquad (3.5a)$$
$$(ab)c+(bc)a+(ca)b=0 \qquad (3.5b)$$

δηλαδή ανάγονται στις συνήθεις ιδιότητες των Lie αλγεβρών.

ΛΗΜΜΑ 3.1. Κάθε αντιμεταθετή Lie-επιδεκτή άλγεβρα είναι Lie άλγεβρα.

Όπως θα δούμε στην συνέχεια οι Lie-επιδεκτές άλγεβρες αποτελούν μια αλγεβρική επικάλυψη των Lie αλγεβρών.

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

Α) Οι Lie άλγεβρες είναι Lie-επιδεκτές. Ας θεωρήσουμε μια Lie άλγεβρα L με (γενικό) γινόμενο ab, (=-ba). Η προσηρτημένη άλγεβρα L^- είναι ο ίδιος διανυσματικός χώρος στον οποίο ορίζεται και η L^- αλλά εφοδιασμένος με το νέο γινόμενο

$$[a,b]_L = ab - ba = 2ab \qquad (3.6)$$

Έτσι κάθε Lie άλγεβρα είναι Lie-επιδεκτή. Αυτό συνεπάγεται το ενδιαφέρον συμπέρασμα ότι αντίθετα με την περίπτωση των μεταθετών και μη μεταθετών Jordan αλγεβρών οι Lie άλγεβρες συμπεριλαμβάνονται στη ταξινόμηση των Lie-επιδεκτών αλγεβρών.

Β) Οι ιδιότητες των Lie-επιδεκτών αλγεβρών καλύπτουν τις ιδιότητες των Lie αλγεβρών. Όπως είδαμε η ιδιότητα της ευκαμψίας (3.4a) καλύπτει την αντιμεταθετική ιδιότητα (3.5a). Όμοια μπορεί κανείς να δει ότι η ιδιότητα (3.4b) καλύπτει την ιδιότητα του Jacobi (3.5b). Έτσι οι εύκαμπτες Lie-επιδεκτές ιδιότητες (3.4) καλύπτουν τις ιδιότητες των Lie αλγεβρών (3.5). Επίσης μπορεί να δει κανείς ότι η γενική Lie-επιδεκτή ιδιότητα (3.2β) καλύπτει τις εύκαμπτες ιδιότητες (3.4) και επομένως τις ιδιότητες των Lie αλγεβρών (3.5). Από τα παραπάνω προκύπτει το συμπέρασμα ότι γενικά η Lie επιδεκτή άλγεβρα δεν είναι ούτε μεταθετή ούτε αντιμεταθετή ούτε εύκαμπτη.

Γ) Οι Lie επιδεκτές άλγεβρες κάτω από κατάλληλες πραγματώσεις, (realization), ανάγονται σε Lie άλγεβρες. Ας θεωρήσουμε την (λ,μ) μεταθετή άλγεβρα Α με γινόμενο ab. Το γινόμενο στην Α(λ,μ) δίδεται από την εξίσωση (1.28) δηλαδή

$$a*b = \lambda ab + \mu ba \qquad (3.7)$$

Εάν ισχύει $\lambda \neq \pm\mu$, τότε το γινόμενο (3.7) δεν είναι ούτε μεταθετό ούτε αντιμεταθετό δηλαδή η Α(λ,μ) δεν είναι ούτε μεταθετή Jordan άλγεβρα ούτε Lie άλγεβρα. Επομένως το γινόμενο (3.7) ικανοποιεί τη γενική Lie-επιδεκτή ιδιότητα (3.2β) και η άλγεβρα Α(λ,μ) είναι μια Lie-επιδεκτή άλγεβρα.

Με περισσότερη ανάλυση μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι το γινόμενο (3.7) ικανοποιεί τις εύκαμπτες Lie-επιδεκτές ιδιότητες (3.4). Έτσι η Α(λ,μ) είναι μια εύκαμπτη Lie-επιδεκτή άλγεβρα. Αλλά

$$\lim_{\substack{\lambda \to 1 \\ \mu \to -1}} A(\lambda,\mu) = \bar{A} \qquad (3.8)$$

και αυτό αποδεικνύει την παραπάνω ιδιότητα.

Ένα πιο γενικό παράδειγμα γινομένου μιας Lie-επιδεκτής άλγεβρας η οποία δεν είναι εύκαμπτη αλλά ικανοποιεί το όριο (3.8) θα δοθεί αργότερα (Κεφ.2 και sec 1.5)

Ας σημειώσουμε επίσης ότι η λ-μεταθετή άλγεβρα Α(λ) μιας προσεταιριστικής άλγεβρας Α με γινόμενο

$$a*b = \lambda ab + (1-\lambda)ba \qquad (3.9)$$

είναι επίσης εύκαμπτη Lie επιδεκτή άλγεβρα. Επομένως δεν υπάρχει πεπερασμένη τιμή $\lambda \in F$ που να ικανοποιεί το όριο (3.8). Αυτός είναι ο λόγος που οι άλγεβρες Α(λ,μ) είναι προτιμότερες από την Α(λ) για την ανάλυση μας. Αλλά οι άλγεβρες Α(λ) αποτελούν μια πραγμάτωση των μη μεταθετών Jordan αλγεβρών. Επίσης μπορούμε να δούμε ότι οι άλγεβρες Α(λ,μ) είναι επίσης μια πραγμάτωση των μη μεταθετών Jordan αλγεβρών δηλαδή ικανοποιούν τις ιδιότητες :

$$(ab)a - a(ba) = 0$$

$$(a^2b)a-a^2(ba)=0$$

Αυτό συνεπάγεται την εξής ιδιότητα:
Στη ταξινόμηση των Lie επιδεκτών αλγεβρών εμφανίζονται όχι μόνο οι Lie άλγεβρες αλλά και μερικές μη μεταθετές Jordan άλγεβρες. Στην προσπάθεια μας να κατανοήσουμε τη σχέση των Lie αλγεβρών και των μεταθετών Jordan αλγεβρών μέσα στο πλαίσιο των Lie επιδεκτών αλγεβρών παραθέτουμε την επόμενη κλάση αλγεβρών. Μια Jordan-επιδεκτή άλγεβρα U στο σώμα F χαρακτηριστικής p είναι ένας διανυσματικός χώρος στο σώμα F με γινόμενο ab έτσι ώστε η προσηρτημένη άλγεβρα U^+ εφοδιασμένη με το γινόμενο

$$\{a,b\}_U = \frac{1}{2}(ab+ba) \tag{3.10}$$

να είναι μια μεταθετή Jordan άλγεβρα.

Προφανώς, όταν το γινόμενο ab είναι προσεταιριστικό, οι παρακάτω συνθήκες ισχύουν στην περίπτωση των ειδικών μεταθετών Jordan αλγεβρών. Έτσι οι προσεταιριστικές άλγεβρες δεν είναι μόνο Lie-επιδεκτές αλλά και Jordan επιδεκτές. Από την άποψη των αλγεβρικών ιδιοτήτων που ικανοποιεί η εσωτερική πράξη μιας άλγεβρας μπορούμε να έχουμε την εξής ταξινόμηση.

Ι') Γενικές Jordan-επιδεκτές άλγεβρες είναι οι άλγεβρες U σε σώμα F, (εδώ οι χαρακτηριστική είναι $p\neq 2$), που ικανοποιούν την σχέση:

$$\begin{aligned}&(a^2b)a-a(ba^2)+(ba^2)a+a(a^2b)=\\&=a^2(ba)-(ab)a^2+a^2(ab)+(ba)a^2\end{aligned} \tag{3.11}$$

Η σχέση αυτή θα ονομάζεται **γενική Jordan-επιδεκτή ιδιότητα**. Το γινόμενο (3.10) εύκολα μπορούμε να δούμε ότι ικανοποιεί την Jordan ιδιότητα δηλαδή:

$$\{\{\{a,a\}_U,b\}_U,a\}_U = \{\{a,a\}_U,\{b,a\}_U\}_U \tag{3.12}$$

ΙΙ') Εύκαμπτες Jordan-επιδεκτές άλγεβρες είναι οι άλγεβρες U σε σώμα F που ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$(ab)a=a(ba) \tag{3.13a}$$
$$(a^2b)a+a(a^2b)=a^2(ba)+a^2(ab), \quad \forall a,B\in U \tag{3.13b}$$

Η σχέση (3.13a) είναι η εύκαμπτη ιδιότητα και η (3.13b) η γενική Jordan-επιδεκτή ιδιότητα (βλ.Appendix 1.A). Θα ονομάζουμε την σχέση (3.13b) εύκαμπτη Jordan-επιδεκτή ιδιότητα.

ΙΙΙ' Μεταθετές Jordan άλγεβρες. Εδώ επειδή το γινόμενο ab είναι μεταθετό δηλαδή

$$ab=ba$$

η συνθήκη της Jordan επιδεκτικότητας ανάγεται στη σχέση

$$(a^2b)a=a^2(ba) \tag{3.14}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Κάθε μεταθετή Jordan-επιδεκτή άλγεβρα είναι μια μεταθετή Jordan άλγεβρα. Επίσης κάθε μη μεταθετή Jordan άλγεβρα είναι μια εύκαμπτη Jordan-επιδεκτή άλγεβρα.

Η θεωρία των Jordan-επιδεκτών αλγεβρών συνδέεται στενά με την θεωρία των Lie-επιδεκτών αλγεβρών. Π.χ. οι Jordan επιδεκτές άλγεβρες είναι μια αλγεβρική κάλυψη των Jordan αλγεβρών. Εδώ ας σημειώσουμε ότι μια Lie άλγεβρα είναι με την τετριμμένη έννοια Jordan-επιδεκτή αφού οι ιδιότητες (3.11) και (3.13) πάντα ικανοποιούνται επειδή $a^2=0$ για κάθε στοιχείο a της Lie άλγεβρας. Επίσης οι μεταθετές Jordan άλγεβρες είναι με την τετριμμένη έννοια Lie-επιδεκτές διότι οι ιδιότητες (3.2) και (3.4) ικανοποιούνται πάντα.

Μπορούμε τώρα να προσδιορίσουμε την σχέση των Lie-αλγεβρών και των μεταθετών Jordan αλγεβρών μέσα από την έννοια της Lie-επιδεκτής άλγεβρας. Κάθε Lie-επιδεκτή άλγεβρα όταν δεν είναι ούτε Lie ούτε προσεταιριστική θα ονομάζεται **μη τετριμμένη Lie-επιδεκτή άλγεβρα**. Το γινόμενο ab αυτών των αλγεβρών δεν είναι ούτε μεταθετό ούτε αντιμεταθετό και επομένως πάντα μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$ab=\frac{1}{2}[a,b]_U+\{a,b\}_U \tag{3.15}$$

Η παραπάνω σχέση μας οδηγεί στην εξής ενδιαφέρουσα ιδιότητα:

Κάθε μη τετριμμένη Lie-επιδεκτή άλγεβρα U μπορεί από κοινού να είναι Lie-επιδεκτή και Jordan-επιδεκτή. Αυτό συμβολικά θα το γράφουμε:

$$U=U^- \cong U^+ \tag{3.16}$$

όπου το σύμβολο $\cong$ υποδηλώνει ότι οι άλγεβρες U, U^- και U^+ συμπίπτουν σαν διανυσματικοί χώροι και ότι τα γινόμενα τους σχετίζονται από την (3.15)

Τέτοιου τύπου άλγεβρας, δηλαδή να είναι συγχρόνως Lie- και Jordan-επιδεκτή είναι η άλγεβρα Α(λ,μ) με γινόμενο

$$ab=\rho[a,b]_U+\sigma\{a,b\}_U \tag{3.17}$$

το οποίο γινόμενο ικανοποιεί τις ιδιότητες:

α) της γενικής και εύκαμπτης Lie-επιδεκτής άλγεβρας (3.2), (3.4) και

β) της Jordan-επιδεκτής άλγεβρας (3.11), (3.13)

Σαν συμπέρασμα μπορούμε να πούμε ότι μια Lie-επιδεκτή άλγεβρα U μπορεί να έχει ένα μη τετριμμένο περιεχόμενο όχι μόνο μιας Lie άλγεβρας U^- αλλά και μιας μεταθετής Jordan άλγεβρας U^+. Επομένως η μελέτη των Lie-επιδεκτών αλγεβρών απαιτεί την χρήση και των Lie και των Jordan αλγεβρών.

Για να το καταλάβουμε αυτό καλλίτερα ας θεωρήσουμε μια μη τετριμμένη Lie-επιδεκτή άλγεβρα U, πεπερασμένων διαστάσεων. Έστω $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ μια βάση με τις αντίστοιχες σχέσεις κλειστότητας

$$b_i b_j = \sum_{k=1}^{n} {}_U C_{ij}^k b_k \tag{3.18}$$

όπου ${}_U C_{ij}^k$ οι κατασκευαστικές σταθερές της άλγεβρας U ως προς την βάση B. Μπορεί να συμβεί η ίδια βάση B να είναι επίσης κλειστή ως προς τα Lie και Jordan γινόμενα με αντίστοιχες σχέσεις κλειστότητας:

$$[b_i, b_j]_U = \sum_{k=1}^{n} {}_L C_{ij}^k b_k \tag{3.19a}$$

$$\{b_i, b_j\}_U = \sum_{k=1}^{n} {}_J C_{ij}^k b_k \tag{3.19b}$$

Σ' αυτή την περίπτωση οι κατασκευαστικές σταθερές της U μπορούν να εκφρασθούν συναρτήσει των κατασκευαστικών σταθερών της U^- και U^+ δηλαδή :

$$ {}_U C_{ij}^k = \frac{1}{2}\, {}_L C_{ij}^k + {}_J C_{ij}^k \qquad (3.20) $$

Σαν παράδειγμα των παραπάνω ας θεωρήσουμε την θεμελιώδη αναπαράσταση των U(n) αλγεβρών, τα στοιχεία των οποίων εδώ θα θεωρηθούν σαν πίνακες n×n. Όπως ξέρουμε οι άλγεβρες αυτές είναι κλειστές και ως προς τον μεταθέτη και ως προς τον αντιμεταθέτη και ικανοποιούν τις σχέσεις (3.18) και (3.19). Ας θυμηθούμε την φυσική τους σημασία :
Για την περίπτωση της SU(2)-spin άλγεβρας, η θεμελιώδης αναπαράσταση δίνεται πάλι από τους πίνακες του Pauli :

$$ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3.21) $$

και παίζουν έναν κεντρικό ρόλο για τον χαρακτηρισμό του 1/2 spin. Για την περίπτωση της SU(2)-isospin άλγεβρας, η θεμελιώδης αναπαράσταση δίνεται πάλι από τους πίνακες του Pauli, μόνο που τώρα επενεργεί σ' ένα εσωτερικό χώρο, (τον isospin χώρο), και παίζει έναν κεντρικό ρόλο για τον χαρακτηρισμό των ισοτοπικών doublets, όπως τα nucleons.

Τέλος η θεμελιώδης αναπαράσταση δίνεται από τους Gell-Mann λ-πίνακες και παίζει έναν κεντρικό ρόλο για την έννοια του quark. Για την περίπτωση των πινάκων Pauli οι σχέσεις (3.19) γίνονται:

$$ [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\delta_k \;, \qquad \{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \qquad (3.22) $$

και η σχέση (3.18) μπορεί να πάρει την εξής μορφή

$$ \sigma_i\sigma_j = \alpha[\sigma_i,\sigma_j]_A + \beta\{\sigma_i,\sigma_j\}_A = \sum_{k=1}^{3}\left(2i\alpha\varepsilon_{ijk} + 2\beta\delta_{ij}\right)\sigma_\kappa = \sum_{\iota=1}^{3} {}_U C_{ij}^k \delta_{ik} \qquad (3.23) $$

Έτσι η άλγεβρα A(λ,μ) με βάση $B=\{\sigma_i\}$ είναι μια πεπερασμένων διαστάσεων τετριμμένη Lie επιδεκτή άλγεβρα για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$ [A(\lambda,\mu)]^- \approx SU(2) \qquad (3.24a) $$

$$ \lim_{\substack{\lambda\to 1 \\ \mu\to -1}} A(\lambda,\mu) \equiv SU(2) \qquad (3.24b) $$

$$ [A(\lambda,\mu)]^+ \approx J(D_3, T) \qquad (3.24c) $$

$$ \lim_{\substack{\lambda\to 1/2 \\ \mu\to 1/2}} A(\lambda,\mu) \equiv J(D_3, T) \qquad (3.24d) $$

όπου $J(D_3,T)$ είναι μια μεταθετή Jordan άλγεβρα τύπου (B^+). Έστω S ένας υπόχωρος μιας άλγεβρας U επί του σώματος F χαρακτηριστικής μηδέν. Ο **μεταθέτης χώρος** (commutator space) του S, που θα τον συμβολίζουμε με $U^{(S)}$ ορίζεται από το σύνολο των στοιχείων $a\in U$ τέτοια ώστε $[a,b]_U=0 \quad \forall b\in S$, δηλαδή

$$ U^{(S)} = \{a\in U \,/\, [a,b]_U=0 \;\forall b\in S\} $$

Τότε ισχύουν τα επόμενα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 Εάν a είναι ένα στοιχείο μιας εύκαμπτης Lie-επιδεκτής power associative άλγεβρας U, τότε:

$$ U^{(a)} \subseteq U^{(a^2)} $$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2 Έστω U μια εύκαμπτη, Lie-επιδεκτή, power-associative άλγεβρα χαρακτηριστικής μηδέν και S ένας υπόχωρος της U. Τότε ο μεταθέτης χώρος $U^{(S)}$ είναι μια υποάλγεβρα της U. Εάν S^- είναι μια υποάλγεβρα της U^- και $b^2 \in S$ τότε το S είναι μια υποάλγεβρα της U.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3 Έστω U μια εύκαμπτη, Lie-επιδεκτή power-associative άλγεβρα τέτοια ώστε η προσηρτημένη άλγεβρα U^- να είναι ένα ευθύ άθροισμα απλών Lie-αλγεβρών U_i^-.

$$U^- = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i^- \tag{3.25}$$

όπου οι διανυσματικοί χώροι U_i των U_I^- είναι υπόχωροι της U. Τότε η U είναι ευθύ άθροισμα των απλών αλγεβρών U_i

$$U = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i \tag{3.26}$$

Ένα στοιχείο a μιας power-associative άλγεβρας U γεννά μια προσεταιριστική και μεταθετή υποάλγεβρα U_a της U που αποτελείται από όλα τα πολυώνυμα με μεταβλητή το a. Εάν δεχθούμε ότι η U είναι πεπερασμένης διάστασης τότε και η U_a είναι πεπερασμένης διάστασης. Η διάσταση d της U_a ονομάζεται **βαθμός** της U (ως προς το a).

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4 Έστω U μια Lie-επιδεκτή power-asociative άλγεβρα και U μια απλή Lie άλγεβρα βαθμού 3. Τότε η U είναι βαθμού 1.

Το θεώρημα αυτό είναι αρκετά σημαντικό στην περίπτωση της εμβάπτισης της SU(2) άλγεβρας στην SU(2)-επιδεκτή κάλυψη. Έστω G_i, i=1,2,3 οι γεννήτορες της $SU(2)=U^-$ δηλαδή οι πίνακες του Pauli (3.21). Ένα γενετικό, (generic), στοιχείο a της U μπορεί να γραφεί σαν

$$a=\alpha\delta_1+\beta\delta_2+\gamma\delta_3 \qquad \alpha,\beta,\gamma\in F \tag{3.27}$$

και το τετράγωνο του δίδεται από την σχέση

$$a^2=\lambda\sigma_1+\mu\sigma_2+\delta\sigma_3 \qquad \lambda,\mu,\delta\in F \tag{3.28}$$

Σ' αυτή την περίπτωση μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

$$a^2=f(a)a \quad \text{με } f(a)=\frac{\delta}{\gamma}\in F \tag{3.29}$$

Η τελευταία σχέση διασαφηνίζει το θεώρημα 4 δηλαδή ο βαθμός της U σ' αυτή την περίπτωση είναι 1. Ο Weiner απέδειξε ότι η συνάρτηση f της (3.29) είναι γραμμική.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5 Εάν η U είναι μια κατά δύναμη προσεταιριστική, (power-associative), άλγεβρα βαθμού 1 τότε η πράξη του γινομένου δίνεται από την σχέση:

$$\alpha b=\frac{1}{2}[f(a)b+f(b)a]+[a,b]_U, \quad f(a),f(b)\in F \tag{3.30}$$

Εάν επί πλέον η U είναι μια εύκαμπτη, Lie-επιδεκτή άλγεβρα και η U είναι απλή, τότε $U\cong U^-$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2 Μια βασική παραδοχή στα παραπάνω είναι ότι η άλγεβρα U εκτός του ότι πρέπει να είναι κατά δύναμη προσεταιριστική, να είναι εύκαμπτη Lie-επιδεκτή. Εδώ ας σημειώσουμε ότι αν και οι μεταθετές Jordan άλγεβρες είναι κατά δύναμη προσεταιριστικές και επομένως το γινόμενο στην U^+ που μπορεί να γράφει με την μορφή (3.15) δηλαδή:

$$ab=\frac{1}{2}[\alpha,b]_U+\{\alpha,b\}_U$$

είναι κατά δύναμη προσεταιριστική. Αυτό αναγκαστικά δεν ισχύει για την άλγεβρα U. Αυτό που ισχύει είναι ότι μια Lie-επιδεκτή άλγεβρα είναι κατά δύναμη προσεταιριστική εάν ισχύει:

$$[\{a,a\}_U, a]_U = 0 \quad \forall a \in U \tag{3.31}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.3 Μια άλγεβρα που χαρακτηρίζεται μόνο από την ταυτότητα του Jacobi, (χωρίς την αντιμεταθετική ιδιότητα του γινομένου, δηλαδή, την ab+ba=0), δεν είναι αναγκαστικά Lie άλγεβρα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1 Ας θεωρήσουμε την άλγεβρα U με βάση

$$B=\{b_1, b_2, b_3, b_4\} \tag{3.32a}$$

και με γινόμενο

$$b_1b_3=b_2b_3=b_3^2=b_4b_3=b_1 \tag{3.32b}$$

$$b_1b_1=b_2b_4=b_3b_4=b_4^2=b_2 \tag{3.32γ}$$

όπου τα άλλα γινόμενα είναι μηδέν. Τότε η U ικανοποιεί την ταυτότητα του Jacobi

$$a(bc)+b(ca)+c(ab)=0 \tag{3.33}$$

αλλά όχι την ισοδύναμη μορφή

$$(ab)c+(bc)a+(ca)b=0 \tag{3.34}$$

(αφού δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα) και επομένως η U δεν είναι Lie άλγεβρα. [Οι σχέσεις (3.33) και (3.34) είναι ισοδύναμες για τις Lie άλγεβρες σε σχέση με την αντιμεταθετικότητα του γινομένου]. Έτσι μόνο η ταυτότητα του Jacobi (3.33) δεν είναι αρκετή να χαρακτηρίσει μια άλγεβρα power-associative. Όμως εάν ισχύουν οι σχέσεις (3.33) και (3.34), τότε

$$a^3=a^2a=aa^2=0 \tag{3.35a}$$

$$a^2a^2=(a^2a)a=0 \tag{3.35b}$$

$$a^n=a^{n-1}a=0 \tag{3.35c}$$

$$a^na^m=a^{n+m}=0 \tag{3.35d}$$

και η άλγεβρα είναι power-associative. Αυτό ξανά επιβεβαιώνει το γεγονός ότι μια Lie-επιδεκτή άλγεβρα είναι κατά δύναμη προσεταιριστική, προϋποθέτοντας ότι ικανοποιούνται ορισμένοι περιορισμοί στην Lie άλγεβρα, διότι και οι δυο νόμοι (3.33) και (3.34) γενικά παραβιάζονται σε μια Lie-επιδεκτή άλγεβρα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.6 Έστω U μια εύκαμπτη Lie-επιδεκτή άλγεβρα επί του σώματος F χαρακτηριστικής p=0. Εάν η προσηρτημένη άλγεβρα U^- είναι μια ημιαπλή άλγεβρα τότε η U είναι το ευθύ άθροισμα απλών εύκαμπτων Lie-αλγεβρών.

Η βασική διαφορά μεταξύ των θεωρημάτων (3.3) και (3.6) είναι η απουσία στο θεώρημα (3.6) της συνθήκης της power-associativity. Επειδή μια Lie-επιδεκτή άλγεβρα δεν είναι κατ' ανάγκην κατά δύναμη προσεταιριστική το θεώρημα (3.6) αποτελεί μια καλή βελτίωση του προηγουμένου.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.1 Έστω U μια εύκαμπτη Lie-επιδεκτή άλγεβρα επί του σώματος F. Εάν η προσηρτημένη άλγεβρα U^- είναι το ευθύ άθροισμα κεντρικών απλών Lie αλγεβρών τότε η U είναι το ευθύ άθροισμα απλών εύκαμπτων Lie-επιδεκτών αλγεβρών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.4 Στο θεώρημα (3.6) η προσηρτημένη άλγεβρα U είναι ημιαπλή ενώ στο πόρισμα 3.1 η U^- είναι κεντρική απλή.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.7 Έστω U μια εύκαμπτη Lie-επιδεκτή κατά δύναμη προσεταιριστική άλγεβρα επί του σώματος F. Εάν η U^- είναι μια απλή άλγεβρα τότε $U \cong U^-$. Το παραπάνω θεώρημα προφανώς είναι μια γενίκευση του θεωρήματος (3.5) όσον αφορά τον βαθμό. Επίσης βλέπουμε ότι η συνθήκη της κατά δύναμης προσεταιριστικότητας με τις ανάλογες παραδοχές εξαναγκάζει την Lie-επιδεκτή άλγεβρα U να είναι ισομορφική προς την προσηρτημένη άλγεβρα U .

4. ΚΛΑΣΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΩΝ LIE-ΕΠΙΔΕΚΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΩΝ

Οι αλγεβρικές δομές που μελετήσαμε μέχρι τώρα είναι αφηρημένες, με την έννοια ότι αναφέρονται σε μια άλγεβρα U βλέποντας την σαν διανυσματικό χώρο με στοιχεία a,b,... γινόμενο ab και με ορισμένους αλγεβρικούς νόμους.

Ο σκοπός μας στην συνέχεια είναι να εφαρμόσουμε αυτές τις αφηρημένες αλγεβρικές δομές σε Νευτώνεια συστήματα N σωμάτων, μαζών m_k, k=1,2,...,N στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο με συντεταγμένες $\{r^k\}=\{r^{kx}, r^{ky}, r^{kz}\}$. Η εφαρμογή αυτή απαιτεί τα στοιχεία των αφηρημένων αλγεβρών να είναι συναρτήσεις και το γινόμενο κάποιες κατάλληλες παρενθέσεις, (όπως π.χ. η παρένθεση Poisson κ.α.) Πιο συγκεκριμένα ο διανυσματικός χώρος U των στοιχείων a,b,c, μπορεί να πραγματωθεί από τον χώρο

$$U=\{A(t,\alpha), B(t,\alpha), C(t,\alpha)\} \tag{4.1a}$$

$$A, B, C,\dots\in C^{\infty}(R_{t,\alpha}) \tag{4.1b}$$

των συναρτήσεων με μεταβλητές τον χρόνο t και τις

$$\{\alpha^{\mu}\}=\{r^{k\alpha}, p_{k\alpha}\} \tag{4.2}$$

$$\mu=1,2,...,6N,\quad k=1,2,...,N,\quad \alpha=x,y,z$$

όπου οι μεταβλητές $p_{k\alpha}$ μπορούν να θεωρηθούν σαν οι συνιστώσες της γραμμικής ορμής $p_{k\alpha}=m_k\dot{r}_{k\alpha}$. Εισάγοντας κατάλληλη τοπολογία οι μεταβλητές $\{\alpha^{\mu}\}$ μπορούν να θεωρηθούν σαν τοπικοί χάρτες μιας πολλαπλότητας. Το σώμα F πάνω στο οποίο ορίζεται η άλγεβρα U θεωρούμε ότι έχει χαρακτηριστική μηδέν.

Εφοδιάζουμε τώρα τον συναρτησιακό χώρο U με τις παρενθέσεις (ή με τον διγραμμικό νόμο σύνθεσης):

$$A\circ B=\frac{\partial A}{\partial\alpha^{\mu}}S^{\mu\nu}(t,\alpha)\frac{\partial B}{\partial\alpha^{\nu}} \tag{4.3a}$$

$$S^{\mu\nu}\in C^{\infty}(R_{t,\alpha}) \tag{4.3b}$$

$$|S^{\mu\nu}|(R_{t,\alpha})\neq 0 \tag{4.3c}$$

όπου η συνθήκη (4.3c) μας εγγυάται την κανονικότητα του $S^{\mu\nu}$, (και επομένως ότι υπάρχει ο αντίστροφος), σ' όλη την περιοχή $R_{t,\alpha}$ των local μεταβλητών $(t;\alpha^{\mu})$ που μας ενδιαφέρει.

Για απλότητα έχουμε δεχθεί τις συνθήκες συνέχειας (4.1b) και (4.3b) και θα αναφερόμαστε στις παρενθέσεις (4.3) **σαν κανονικές και τάξεως C^{∞}**. Επίσης θα ονομάζομε τις παρενθέσεις (4.3) μη τετριμμένες όταν ο τανυστής S εξαρτάται τουλάχιστον από κάποια από τις μεταβλητές α^{μ} . Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι οι παρενθέσεις (4.3) ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$A\circ(B+C)=A\circ B+A\circ C \quad \text{Δεξιά επιμεριστική ιδιότητα} \tag{4.4a}$$

$$(A+B)\circ C=A\circ C+B\circ C \quad \text{Αριστερή επιμεριστική ιδιότητα} \tag{4.4b}$$

$$(\alpha\cdot A)\circ B=A\circ(\alpha\cdot B)=\alpha\cdot(A\circ B)=(A\cdot\alpha)\circ B=A\circ(B\cdot\alpha)=(A\circ B)\cdot\alpha \tag{4.4c}$$

με $\alpha\in R$ και $\alpha\cdot A$ ο συνήθης πολλαπλασιασμός αριθμού με συνάρτηση. Ο συναρτησιακός χώρος U εφοδιασμένος με τις παρενθέσεις (4.3) αποτελεί μια <u>κλασική πραγμάτωση μιας αφηρημένης άλγεβρας</u>. Ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη έκφραση του τανυστή $S^{\mu\nu}$ οι παρενθέσεις (4.3) ικανοποιούν <u>τον δεξιό και αριστερό διαφορικό νόμο</u>.

$$A \circ BC=(A \circ B)C+B(A \circ C)$$
(4.5a)

$$AB \circ C=(A \circ C)B+A(B \circ C)$$
(4.5b)

όπου BC είναι το γνωστό (προσεταιριστικό) γινόμενο των συναρτήσεων, και τον δεξιό και αριστερό βαθμωτό νόμο.

$$A \cdot \alpha=0 \tag{4.6a}$$
$$\alpha \cdot A=0 \tag{4.6b}$$

Οι διαφορικοί νόμοι (4.5) είναι βασικοί και από αλγεβρικής και από φυσικής πλευράς. Όμως οι βαθμωτοί κανόνες (4.6) είναι από αλγεβρικής πλευράς περιοριστικοί. Αυτό είναι μια ένδειξη ότι οι παρενθέσεις (4.3) δεν είναι οι πιο γενικές κλασικές πραγματώσεις ενός αφηρημένου γινομένου μιας άλγεβρας. Είναι όμως δυνατό να βρεθούν πιο γενικές πραγματώσεις οι οποίες να ικανοποιούν τους κλασσικούς αλγεβρικούς κανόνες (4.4) και τους διαφορικούς κανόνες (4.3) αλλά να παραβιάζουν τους βαθμωτούς κανόνες (4.6). Παράδειγμα αυτού αποτελεί το γινόμενο Weiner ,(3.30), που ορίζεται ως εξής: Έστω ότι η U είναι μια power-associative άλγεβρα βαθμού 1, τότε το γινόμενο δίνεται από την σχέση:

$$ab=\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]+\left[a,b\right]_U$$

όπου f μια γραμμική συνάρτηση $f: U \rightarrow F$ και επομένως f(α), f(b)$\in$F.

Επειδή στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε κλασικές πραγματώσεις αφηρημένων αλγεβρών χρησιμοποιώντας τις παρενθέσεις (4.3), είναι σημαντικό να διατυπώσουμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες γι' αυτές τις παρενθέσεις ώστε να χαρακτηρίζεται μια άλγεβρα σαν Lie- επιδεκτή άλγεβρα.

Όπως ξέρουμε η γενική συνθήκη που χαρακτηρίζει μια Lie-επιδεκτή άλγεβρα είναι :

$$[a,b,c]_U+[b,c,a]_U+[c,a,b]_U = [c,b,a]_U+[b,a,c]_U+[a,c,b]_U$$

αφού βεβαίως ισχύει η (3.2α): $[a,b]_U+[b,a]_U=0$

Η συνθήκη αυτή συναρτήσει των παρενθέσεων (4.3) γράφεται:

$$((A \circ B) \circ C-A \circ (B \circ C))+((B \circ C) \circ A-B \circ (C \circ A))+((C \circ A) \circ B-C \circ (A \circ B))=$$
$$=((C \circ B) \circ A-C \circ (B \circ A))+((B \circ A) \circ C-B \circ (A \circ C))+((A \circ C) \circ A-A \circ (C \circ B)) \tag{4.7}$$

Η συνθήκη αυτή πρέπει να ισχύει για οποιαδήποτε στοιχεία A,B,C της U. Επομένως πρέπει να ισχύει και για στοιχεία της μορφής:

$$A=\alpha^{\mu}, \quad B=\alpha^{\nu} \quad \text{και} \quad C=\alpha^{T}$$

Για να ικανοποιούν οι παρενθέσεις (4.3) την σχέση (4.7) και δεδομένου ότι δεν περιέχουν την χρονική παράγωγο, πρέπει να ισχύει το εξής θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ικανοποιούν οι παρενθέσεις (4.3) την συνθήκη (4.7) της Lie-επιδεκτικότητας είναι να ικανοποιούνται ταυτοτικώς οι εξισώσεις :

$$\left(S^{\tau\rho}-S^{\rho\tau}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^{\rho}}\left(S^{\mu\nu}-S^{\nu\mu}\right)+\left(S^{\mu\rho}-S^{\rho\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^{\rho}}\left(S^{\nu\tau}-S^{\tau\nu}\right)+\left(S^{\nu\rho}-S^{\rho\nu}\right)\frac{\partial}{\partial\alpha^{\rho}}\left(S^{\tau\mu}-S^{\mu\tau}\right)\equiv 0 \tag{4.8}$$

να ικανοποιούνται ταυτοτικά από τον τανυστή $S^{\mu\nu}$ σ' όλο το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1 Το θεώρημα αυτό μεταφέρει την συνθήκη της Lie-επιδεκτικότητας σ' ένα σύστημα συνθηκών του τανυστή $S^{\mu\nu}$.

Όταν οι εξισώσεις (4.8) επαληθεύονται, ο συναρτησιακός χώρος U εφοδιασμένος με τις παρενθέσεις (4.3) αποτελεί μια κλασική πραγμάτωση μιας γενικής Lie-επιδεκτής άλγεβρας. Πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε, ότι η αλγεβρική συνθήκη (4.7) μετασχηματίζεται από το θεώρημα (4.1) σ' ένα ημιγραμμικό σύστημα πρώτης τάξης διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους με άγνωστες συναρτήσεις τα $S^{\mu\nu}$. Έτσι, κάθε λύση $S^{\mu\nu}$ (που είναι C^{∞} και κανονική) των εξισώσεων (4.8) χαρακτηρίζει τις παρενθέσεις (4.3), που είναι Lie-επιδεκτές με την γενική έννοια. Επίσης, εάν οι εξισώσεις (4.8) είναι συμβιβαστές, η έκφραση του τανυστή $S^{\mu\nu}$ δεν είναι μοναδική και, επομένως, υπάρχει μια οικογένεια γενικών Lie- επιδεκτών παρενθέσεων.

Οι flexible Lie-επιδεκτές συνθήκες :

$$[a,b,a] = 0$$

$$[a,b,c]_U+[b,c,a]_U+[c,a,b]_U = 0$$

εκφρασμένες συναρτήσει των παρενθέσεων (4.3) γίνονται

$$((A\circ B)\circ C-A\circ(B\circ C))+((C\circ B)\circ A-C\circ(B\circ A))=0 \tag{4.9a}$$

$$((A\circ B)\circ C-A\circ(B\circ C))+((B\circ C)\circ A-B\circ(C\circ A))+((C\circ A)\circ B-C\circ(A\circ B))=0 \tag{4.9b}$$

και εδώ ισχύει ένα ανάλογο θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ικανοποιούν οι μη τετριμμένες παρενθέσεις (4.3) τις flexible Lie-επιδεκτές συνθήκες (4.9) είναι, οι επόμενες εξισώσεις

$$S^{\mu\rho}\frac{\partial S^{\tau\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}+S^{\tau\rho}\frac{\partial S^{\nu\mu}}{\partial\alpha^{\rho}}-\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}S^{\rho\tau}-\frac{\partial S^{\tau\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}S^{\rho\mu}\equiv 0 \tag{4.10a}$$

$$\left(S^{\tau\rho}-S^{\rho\tau}\right)\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}+\left(S^{\mu\rho}-S^{\rho\mu}\right)\frac{\partial S^{\nu\tau}}{\partial\alpha^{\rho}}+\left(S^{\nu\rho}-S^{\rho\nu}\right)\frac{\partial S^{\tau\mu}}{\partial\alpha^{\rho}}\equiv 0 \tag{4.10b}$$

να επαληθεύονται ταυτοτικά από τον τανυστή $S^{\mu\nu}$ σ' όλο το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.2 Όταν οι εξισώσεις (4.10) επαληθεύονται ο συναρτησιακός χώρος U εφοδιασμένος με τις παρενθέσεις (4.3) αποτελεί μια κλασική πραγμάτωση μιας γενικής flexible Lie-επιδεκτής άλγεβρας.

ΑΣΚΗΣΗ : Να δειχθεί ότι η flexible Lie-επιδεκτή ιδιότητα (4.10b) είναι ειδική περίπτωση της γενικής Lie-επιδεκτής ιδιότητας (4.8) λαμβάνοντας υπ' όψη την (4.10α).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ.4.3 Παρόμοια μπορεί να αποδείξει κανείς ότι η εξίσωση (3.4b) είναι ειδική περίπτωση της (3.2b) λαμβάνοντας υπ' όψη την (3.4a).

Οι Lie αλγεβρικές ιδιότητες (3.5a) και (3.5b) εάν εκφρασθούν με την βοήθεια των παρενθέσεων (4.3) γίνονται:

$$A\circ B+B\circ A=0 \tag{4.11a}$$

$$(A\circ B)\circ C+(B\circ C)\circ A+(C\circ A)\circ A=0 \tag{4.11b}$$

Επαναλαμβάνοντας τα ίδια βήματα φθάνουμε στο εξής Θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ικανοποιούνται μη τετριμμένες παρενθέσεις (4.3) τις Lie αλγεβρικές ιδιότητες (4.11), είναι να ικανοποιούνται ταυτοτικά από τον τανυστή $S^{\mu\nu}$ οι εξισώσεις

$$S^{\mu\nu}+S^{\nu\mu} \equiv 0 \tag{4.12a}$$

$$S^{\tau\rho}\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial \alpha^{\rho}}+S^{\mu\rho}\frac{\partial S^{\nu\tau}}{\partial \alpha^{\rho}}+S^{\nu\rho}\frac{\partial S^{\tau\mu}}{\partial \alpha^{\rho}} \equiv 0 \tag{4.12b}$$

σ' όλο το πεδίο ορισμού των μεταβλητών.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.4 Όταν οι συνθήκες (4.12) πληρούνται τότε οι παρενθέσεις (4.3) γενικά γράφονται ως εξής.

$$A \circ B=[A,B]^{*} \qquad S^{\mu\nu}(t,\alpha)=\Omega^{\mu\nu}(t.\alpha)$$
(4.13)

και ονομάζονται **γενικευμένες παρενθέσεις Poisson**.

Η λύση της εξίσωσης (4.12) όταν δεν εξαρτάται από τον χρόνο δηλαδή $\Omega=\Omega^{\mu\nu}$ (α), (και υπό ορισμένες τεχνικές επεξηγήσεις;), ονομάζεται **συσσυμπλεκτική**, (co-symplectic), ή Lie-μορφή. Στην περίπτωση που οι παρενθέσεις (4.3) είναι τετριμμένες δηλαδή τα στοιχεία του τανυστή $S^{\mu\nu}$ είναι σταθεροί αριθμοί, τα παραπάνω θεωρήματα δεν εφαρμόζονται. Στη θέση τους έχουμε το εξής πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.1. Μια μορφή του τανυστή $S^{\mu\nu}$ με σταθερά στοιχεία, που είναι παραδεκτή από τους Lie-αλγεβρικούς κανόνες (4.11), είναι η θεμελιώδης συσυμπλεκτική μορφή:

$$\left(\omega^{\mu\nu}\right)=\begin{pmatrix} \left(\left[r^{i\alpha},r^{i\beta}\right]\right) & \left(\left[r^{i\alpha},p_{i\beta}\right]\right) \\ \\ \left(\left[p_{i\alpha},r^{i\beta}\right]\right) & \left(\left[p_{i\alpha},p_{\beta}\right]\right) \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 0_{3N\times 3N} & 1_{3N\times 3N} \\ -1_{3N\times 3N} & 0_{3N\times 3N} \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

στην οποία οι παρενθέσεις (4.13) είναι οι συνήθεις παρενθέσεις Poisson:

$$\left[A,B\right]=\frac{\partial A}{\partial \alpha^{\mu}}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial \alpha^{\nu}}=\frac{\partial A}{\partial r^{\kappa\alpha}}\frac{\partial B}{\partial p_{\kappa\alpha}}-\frac{\partial B}{\partial r^{\kappa\alpha}}\frac{\partial A}{\partial p_{\kappa\alpha}} \tag{4.15}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.5. Τα θεωρήματα (4.1), (4.2) και (4.3) δημιουργούν μια ιεραρχία των κλασικών πραγματώσεων των αλγεβρικών δομών. Η ιεραρχία αυτή είναι ακριβώς όμοια με την αφηρημένη ιεραρχία των Lie-επιδεκτών αλγεβρών των τάξεων Ι, ΙΙ και ΙΙΙ του προηγουμένου κεφαλαίου. Οι συνήθεις αγκύλες Poisson προβάλλουν σαν οι απλούστερες κατανοητές Lie-επιδεκτές αγκύλες σε μια ιεραρχία παρενθέσεων με αυξανόμενες μεθοδολογικές ανάγκες. Όπως θα δούμε αργότερα αυτή η ιεραρχία μπορεί να ερμηνευθεί σαν το αλγεβρικό ανάλογο μιας αντίστοιχης ιεραρχίας των Νευτώνειων δυνάμεων.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε τη γενική λύση των συνθηκών ολοκληρωσιμότητας (4.8) και (4.12). Για τον σκοπό αυτό θα είναι προτιμότερο να ξαναγράψουμε τον θεμελιώδη συσσυμπλεκτικό τανυστή κατά τρόπο πιο κατάλληλο για την γενίκευση του σε μια οποιαδήποτε συσσυμπλεκτική μορφή. Εισάγουμε τον συμβολισμό:

$$R_{\mu}^{0} = \begin{cases} p_{\kappa\alpha} & \mu = 1,2,\cdots,3N \\ \\ 0 & \mu = 3N+1,\cdots,6N \end{cases}$$

τότε ο αντίστροφος του πίνακα ($\omega^{\mu\nu}$) είναι:

$$\left(\omega_{\mu\nu}\right)^{-1} = \left(\left\|\omega^{\alpha\beta}\right\|^{-1}\right)_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0_{3N\times3N} & -1_{3N\times3N} \\ 1_{3N\times3N} & 0_{3N\times3N} \end{pmatrix} \qquad (4.17)$$

ονομάζεται **θεμελιώδης συμπλεκτική μορφή** και μπορεί να γραφεί αναλυτικά :

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_{\nu}^{0}}{\partial \alpha^{\mu}} - \frac{\partial R_{\mu}^{0}}{\partial \alpha^{\nu}} \qquad (4.18)$$

Η επιθυμητή έκφραση για τον θεμελιώδη συμπλεκτικό Lie τανυστή είναι:

$$\left(\omega^{\mu\nu}\right) = \left(\left\|\frac{\partial R_{\alpha}^{0}}{\partial \alpha^{\beta}} - \frac{\partial R_{\beta}^{0}}{\partial \alpha^{\alpha}}\right\|^{-1}\right)^{\mu\nu} \qquad (4.19)$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.2. Κάτω από ορισμένες συνθήκες, (εκείνες της συμπλεκτικής γεωμετρίας), η γενική λύση των Lie αλγεβρικών νόμων (4.12a) και (4.12b) που θα την ονομάζουμε **γενική συσυμπλεκτική μορφή** είναι:

$$\Omega^{\mu\nu}(\alpha) = \left(\left\|\Omega_{\alpha\beta}(\alpha)\right\|^{-1}\right)^{\mu\nu} \qquad (4.20a)$$

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{\partial R_{\beta}(\alpha)}{\partial \alpha^{\alpha}} - \frac{\partial R_{\alpha}(\alpha)}{\partial \alpha^{\beta}} \qquad (4.20b)$$

όπου η συναλλοίωτη μορφή ($\Omega_{\alpha\beta}$) είναι η γενική συμπλεκτική μορφή και τα R είναι 6N ανεξάρτητες τυχαίες συναρτήσεις των τοπικών, (local), μεταβλητών, που ικανοποιούν την συνθήκη κανονικότητας (4.3c)

$$|S^{\mu\nu}|(R_{t,\alpha})\neq 0$$

Οι γενικευμένες Poisson παρενθέσεις παίρνουν τότε τη μορφή :

$$[A,B]^{*} = \frac{\partial A}{\partial \alpha^{\mu}}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial B}{\partial \alpha^{\nu}} = \frac{\partial A}{\partial \alpha^{\mu}}\left(\left\|\frac{\partial R_{\alpha}}{\partial \alpha^{\beta}} - \frac{\partial R_{\beta}}{\partial \alpha^{\alpha}}\right\|\right)\frac{\partial B}{\partial \alpha^{\nu}} \qquad (4.21)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.6 Από τα παραπάνω το πρώτο βήμα της αλγεβρικής ιεραρχίας είναι τώρα προφανές και δίνεται από την ισοτοπία

$$[A,B] \rightarrow [A,B]^{*} \qquad (4.22)$$

η οποία πιο αναλυτικά γράφεται:

$$\omega^{\mu\nu} \rightarrow \Omega^{\mu\nu}(\alpha)=g_{\alpha}^{\ \mu}(\alpha)\omega^{\alpha\nu} \qquad g_{\alpha}^{\ \mu}=\Omega_{\rho}^{\ \mu}\omega_{\rho\alpha} \qquad (4.23)$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι οι συνθήκες που θεωρήσαμε περιορίζονται μόνο στο αντισυμμετρικό μέρος του τανυστή $S^{\mu\nu}$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.3 Μια μερική λύση των Lie-επιδεκτών ιδιοτήτων (4.8), της οποίας το αντισυμμετρικό μέρος έχει σταθερά στοιχεία, είναι :

$$S^{\mu\nu}(\alpha)=\omega^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}(\alpha) \qquad (4.24)$$

όπου $\omega^{\mu\nu}$ είναι ο θεμελιώδης συσσυμπλεκτικός τανυστής

$$t^{\mu\nu}(\alpha)=t^{\mu\nu}(\alpha) \tag{4.25}$$

Οι Lie-επιδεκτές παρενθέσεις των οποίων το αντισυμμετρικό μέρος δίδεται από τις παρενθέσεις Poisson μπορούν να γραφούν

$$\left(\mathrm{A},\mathrm{B}\right)=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha^{\mu}}\mathrm{S}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha^{\nu}}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha^{\mu}}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha^{\nu}}+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha^{\mu}}t^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha^{\nu}}\overset{\text{ορισμος}}{\equiv}\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]+\left(\mathrm{A},\mathrm{B}\right) \tag{4.26}$$

και θα ονομάζονται **θεμελιώδεις Lie-επιδεκτές παρενθέσεις**.

Αυτό τον δεύτερο λήμμα της αλγεβρικής ιεραρχίας αποτελείται από την Lie-επιδεκτή γενοτοπία.

$$[\mathrm{A},\mathrm{B}] \rightarrow (\mathrm{A},\mathrm{B})=[\mathrm{A},\mathrm{B}]\{\mathrm{A},\mathrm{B}\} \tag{4.27}$$

δηλαδή από την μετάβαση από τις Lie άλγεβρες που χαρακτηρίζονται από τις παρενθέσεις Poison στις δομικά πιο γενικές Lie-επιδεκτές άλγεβρες, που χαρακτηρίζονται από τις παρενθέσεις (4.26).
Από τα παραπάνω προκύπτουν τα εξής :

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.4. Κάτω από ικανές τοπολογικές συνθήκες, (της συμπλεκτικής-επιδεκτής Γεωμετρίας), η γενική λύση των Lie-επιδεκτών ιδιοτήτων (4.8) δίνεται από την σχέση:

$$\mathrm{S}^{\mu\nu}(\alpha)=\Omega^{\mu\nu}(\alpha)+\mathrm{T}^{\mu\nu}(\alpha) \tag{4.28}$$

όπου $\Omega^{\mu\nu}(\alpha)$ είναι ο γενικός συσυμπλεκτικός Lie τανυστής και $\mathrm{T}^{\mu\nu}(\alpha)$ είναι ένας οποιοσδήποτε, (όχι αναγκαία κανονικός), συμμετρικός τανυστής

$$\mathrm{T}^{\mu\nu}=\mathrm{T}^{\nu\mu} \tag{4.29}$$

Οι αντίστοιχες παρενθέσεις ονομάζονται Lie-επιδεκτές παρενθέσεις και μπορούν να γραφούν σαν :

$$\left(\mathrm{A},\mathrm{B}\right)^{*}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha^{\mu}}\mathrm{S}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha^{\nu}}=\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha^{\mu}}\Omega^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha^{\nu}}+\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial \alpha^{\mu}}\mathrm{T}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial \alpha^{\nu}}\overset{\text{ορισμος}}{\equiv}\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]^{*}+\left(\mathrm{A},\mathrm{B}\right)^{*} \tag{4.30}$$

Έτσι φθάνουμε στο τελευταίο βήμα της αλγεβρικής ιεραρχίας η οποία δίδεται από την Lie-επιδεκτή ισοτοπία

$$(\mathrm{A},\mathrm{B})=\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]+\left\{\mathrm{A},\mathrm{B}\right\} \longrightarrow (\mathrm{A},\mathrm{B})^{*}=\left[\mathrm{A},\mathrm{B}\right]^{*}+\left\{\mathrm{A},\mathrm{B}\right\}^{*} \tag{4.31}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.4. Για τις παρενθέσεις (4.3) οι οποίες είναι Lie, (τύπου III), ή flexible Lie-επιδεκτές, (τύπου II), ή γενικές Lie-επιδεκτές, (τύπου I), η κλάση όλων των δυνατών ισοτοπικών απεικονίσεων εξαντλεί την κλάση όλων των δυνατών λύσεων των εξισώσεων (4.8), (4.10), (4.12) αντίστοιχα.

Για παράδειγμα αρχίζοντας από τις συνήθεις παρενθέσεις Poisson (4.15) η τάξη όλων των δυνατών ισοτοπικών απεικονίσεων (4.22) χαρακτηρίζει όλες τις δυνατές κλασικές πραγματώσεις του γινομένου των Lie αλγεβρών. Τα ίδια συμβαίνουν και για τις flexible και για τις Lie-επιδεκτές-άλγεβρες.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.5. Για Lie-επιδεκτές παρενθέσεις (4.3) του τύπου III, ή του τύπου II, ή του τύπου I, η κλάση όλων των δυνατών Lie-επιδεκτών γενοτοπικών απεικονίσεων εξαντλεί την τάξη όλων των δυνατών Lie-επιδεκτών παρενθέσεων.

$$\begin{pmatrix} \text{Τυπος III} \\ \\ \text{Lie} - \text{αλγεβρες} \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \text{Τυπος II} \\ \text{Flexible} \\ \text{Lie} - \text{επιδεκτες} \\ \text{αλγεβρες} \end{pmatrix} \subset \begin{pmatrix} \text{Τυπος I} \\ \text{Γενικες} \\ \text{Lie} - \text{επιδεκτες} \\ \text{αλγεβρες} \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

δηλαδή, οι "βαθμοί ελευθερίας" κάθε κλασικής πραγμάτωσης του γινομένου χαρακτηρίζονται από ισοτοπικές απεικονίσεις. Η μετάβαση από τον ένα τύπο στον άλλο χαρακτηρίζεται από γενοτοπικές απεικονίσεις. Ας σημειώσουμε εδώ ότι οι ισοτοπικές και γενοτοπικές απεικονίσεις, στις οποίες αναφερόμαστε, βρίσκονται έξω από το περιεχόμενο της θεωρίας των μετασχηματισμών, διότι οι απεικονίσεις αυτές συμβαίνουν σ' ένα σταθερό σύστημα τοπικών μεταβλητών, (local variables by construction). Οι εσωτερικές ιδιότητες (4.31) αποδεικνύονται πολύ εύκολα παρατηρώντας ότι κάθε λύση των εξισώσεων (4.12) ή (4.10) ή (4.8) είναι μια λύση των μεταγενέστερων εξισώσεων. Και αυτός είναι ένας λόγος γιατί οι συνήθεις παρενθέσεις Poisson είναι εύκαμπτες και Lie-επιδεκτές.

Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι το πόρισμα 4.3 παρέχει τη γενική λύση των Lie-επιδεκτών νόμων (4.8) αλλά όχι αναγκαστικά την γενική λύση της κλασικής πραγμάτωσης των κανονικών, διγραμμικών Lie-επιδεκτών παρενθέσεων. Αυτό οφείλεται στην παραδοχή ότι η διγραμμική μορφή (4.3α) είναι οι παρενθέσεις της θεωρίας όπως συνήθως χρησιμοποιούνται στην Κλασική Μηχανική. Όμως είναι δυνατό να έχουμε γενικότερες διγραμμικές παρενθέσεις π.χ.

$$A \times B = \frac{\partial A}{\partial \alpha^{\mu}} S^{\mu\nu} \frac{\partial B}{\partial \alpha^{\nu}} + AB \tag{4.33}$$

όπου AB είναι το γνωστό γινόμενο των συναρτήσεων.

Η (4.33) εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι ικανοποιεί την αριστερή και δεξιά επιμεριστική ιδιότητα καθώς και τη βαθμωτή ιδιότητα. Ο τανυστής $S^{\mu\nu}$ ανάλογα με τις ιδιότητες που θέλουμε να περιέχει θα ικανοποιεί και αντίστοιχες σχέσεις :

1. Για τη δεξιά και αριστερή εναλλακτική ιδιότητα :

$$a^2b=a(ab), \quad ba^2=(ba)a$$

Ο τανυστής $S^{\mu\nu}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial \alpha^{\rho}} S^{\rho\nu} - S^{\mu\rho} \frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial \alpha^{\rho}} = 0 \tag{4.33a}$$

$$S^{\nu\rho} \frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial \alpha^{\rho}} - \frac{\partial S^{\nu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}} S^{\rho\mu} = 0 \tag{4.33b}$$

(Οι Lie παρενθέσεις δεν ικανοποιούν αυτές τις ιδιότητες)

2. Για την ιδιότητα της κατά δύναμη προσεταιριστικότητας :

$$a^2a=aa^2, \quad a^2a^2=(a^2a)a$$

ο τανυστής $S^{\mu\nu}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\left(S^{\mu\rho}-S^{\rho\mu}\right)\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}=0 \tag{4.34a}$$

$$\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\alpha}}S^{\alpha\beta}\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\beta}}-\frac{\partial}{\partial \alpha^{\alpha}}\left(S^{\alpha\beta}\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}S^{\rho\mu}\right)S^{\alpha\mu} \tag{4.34b}$$

(Οι Poisson παρενθέσεις ικανοποιούν αυτές τις σχέσεις διότι $[\alpha^{\mu}, \alpha^{\mu}]\equiv 0$

3. Για την γενική Jordan-επιδεκτή ιδιότητα :

$(a^2b)a+a(ba^2)+(ba^2)a+a(a^2b)=a^2(ba)+(ab)a^2+a^2(ab)+(ba)a^2$

ο τανυστής $S^{\mu\nu}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^{\alpha}}\left[\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}\left(S^{\rho\nu}+S^{\nu\rho}\right)\right]\left(S^{\alpha\mu}+S^{\mu\alpha}\right)=\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}\left(S^{\alpha\beta}+S^{\beta\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial \alpha^{\beta}}\left(S^{\nu\mu}+S^{\mu\nu}\right) \tag{4.35}$$

4. Για τις εύκαμπτες Jordan-επιδεκτές ιδιότητες :

$(ab)a=a(ba)$

$(a^2b)a+a(a^2b)=a^2(ba)+a^2(ab)$

ο τανυστής $S^{\mu\nu}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$S^{\mu\rho}\frac{\partial S^{\nu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}-\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial \alpha^{\rho}}S^{\rho\mu}=0 \tag{4.36a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^{\alpha}}\left[\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}S^{\rho\nu}\right]S^{\alpha\mu}+S^{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha^{\alpha}}\left[\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}S^{\rho\nu}\right]=\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\alpha}}S^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial \alpha^{\beta}}\left[S^{\nu\mu}+S^{\mu\nu}\right] \tag{4.36b}$$

5. Για τις μεταθετές Jordan ιδιότητες :

$ab=ba, \quad (a^2b)a=a^2(ba)$

ο τανυστής $S^{\mu\nu}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$S^{\mu\nu}-S^{\nu\mu}=0 \tag{4.37a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^{\alpha}}\left(\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\alpha}}S^{\mu\nu}\right)S^{\alpha\mu}=\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\alpha}}S^{\alpha\beta}\frac{\partial S^{\nu\mu}}{\partial \alpha^{\beta}} \tag{4.37b}$$

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2 η από κοινού μελέτη των Lie και Jordan αλγεβρών είναι βασική για την αφηρημένη διαπραγμάτευση των Lie-επιδεκτών αλγεβρών. Επίσης είδαμε ότι υπάρχουν άλγεβρες οι οποίες είναι από κοινού Lie-επιδεκτές και Jordan-επιδεκτές,όπως οι μεταθετές άλγεβρες, (mutation algebra), A(λ,μ). Ένα θεμελιώδες ερώτημα σ' αυτή τη μαθηματική ανάλυση είναι εάν αυτή η ιδιότητα έχει κάποια αντίστοιχη στο επίπεδο των κλασικών πραγματώσεων των παρενθέσεων. Το πρόβλημα αυτό μπορεί καταρχήν να μελετηθεί απαιτώντας οι παρακάτω εξισώσεις:

$$\left(S^{\tau\rho}-S^{\rho\tau}\right)\frac{\partial}{\partial \alpha^{\rho}}\left(S^{\mu\nu}-S^{\nu\mu}\right)+\left(S^{\mu\rho}-S^{\rho\mu}\right)\frac{\partial}{\partial \alpha^{\rho}}\left(S^{\nu\tau}-S^{\tau\nu}\right)+\left(S^{\nu\rho}-S^{\rho\nu}\right)\frac{\partial}{\partial \alpha^{\rho}}\left(S^{\tau\mu}-S^{\mu\tau}\right)=0 \tag{4.38a}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^{\alpha}}\left[\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}\left(S^{\rho\nu}+S^{\nu\rho}\right)\right]\left(S^{\rho\nu}+S^{\nu\rho}\right)=\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial \alpha^{\rho}}\left(S^{\rho\nu}+S^{\nu\rho}\right)\frac{\partial}{\partial \alpha^{\beta}}\left(S^{\nu\mu}+S^{\mu\nu}\right) \tag{4.38b}$$

να ικανοποιούνται ταυτοτικά από τον τανυστή $S^{\mu\nu}$ σ' όλη την θεωρούμενη περιοχή των τοπικών, (local), μεταβλητών. Όπως θα δούμε, ενώ η εξίσωση (4.38a) μπορεί να έχει μη τετριμμένες λύσεις, (δηλαδή λύσεις με μη σταθερά στοιχεία), και οι δυο εξισώσεις (3.38) περιορίζουν αρκετά την δυνατότητα για μη τετριμμένες λύσεις. Για παρόμοιους λόγους, η αναζήτηση μη τετριμμένων παρενθέσεων για τις σχέσεις (4.3), οι οποίες είναι flexible, Lie- και Jordan-επιδεκτές, απαιτεί οι εξισώσεις :

$$S^{\mu\rho}\frac{\partial S^{\tau\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}-S^{\tau\rho}\frac{\partial S^{\nu\mu}}{\partial\alpha^{\rho}}-S^{\mu\rho}\frac{\partial S^{\nu\rho}}{\partial\alpha^{\rho}}+S^{\rho\tau}\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}=0 \qquad (4.39a)$$

$$\left(S^{\tau\rho}-S^{\rho\tau}\right)\frac{\partial S^{\mu\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}+\left(S^{\mu\rho}-S^{\rho\mu}\right)\frac{\partial S^{\nu\tau}}{\partial\alpha^{\rho}}+\left(S^{\nu\rho}-S^{\rho\nu}\right)\frac{\partial S^{\tau\nu}}{\partial\alpha^{\rho}}=0 \qquad (4.39b)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^{\alpha}}\left[\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial\alpha^{\rho}}S^{\rho\nu}\right]S^{\alpha\mu}+S^{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha^{\alpha}}\left[\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial\alpha^{\rho}}S^{\rho\nu}\right]=\frac{\partial S^{\mu\mu}}{\partial\alpha^{\alpha}}S^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha^{\beta}}\left[S^{\nu\mu}+S^{\mu\nu}\right]$$

(4.39c)

να ικανοποιούνται ταυτοτικά από τον τανυστή $S^{\mu\nu}$ στη θεωρούμενη περιοχή των τοπικών μεταβλητών. Ας σημειώσουμε ότι η flexible συνθήκη εμφανίζεται μόνο μια φορά στη γραμμικοποιημένη μορφή (4.10a). Οι εξισώσεις (4.39b) και (4.39c) και οι συνθήκες της Lie- και Jordan-επιδεκτικότητας αντίστοιχα κάτω από τον flexible νόμο.

Το πρόβλημα τώρα μπορεί να μελετηθεί εξετάζοντας εάν στη κλάση των flexible παρενθέσεων (4.3) υπάρχει μια υποκλάση, η οποία ικανοποιεί και τις δυο συνθήκες (4.38b) και (4.38c).

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ενώ οι κλασικές πραγματώσεις των Lie-επιδεκτών αλγεβρών μπορούν να εισαχθούν κατά τρόπο όμοιο με εκείνο της αφηρημένης διαπραγμάτευσης του προηγούμενου κεφαλαίου, η κατάσταση είναι διαφορετική για τις Jordan-επιδεκτές άλγεβρες, και επομένως και για το πρόβλημα των κλασικών πραγματώσεων των Lie-επιδεκτών αλγεβρών, που είναι επίσης και Jordan-επιδεκτές. Μια πρώτη εξήγηση αυτής της κατάστασης είναι η εξής :

Ας θεωρήσουμε την πραγμάτωση μιας άλγεβρας L με, (γενικά, αφηρημένα), στοιχεία a,b,c,... με τη βοήθεια του γινομένου

$$[a,b]_A = a\cdot b - b\cdot a \qquad (4.40)$$

όπου το γινόμενο $a\cdot b$ είναι προσεταιριστικό.

Η "συμμετρικοποιημένη" μορφή αυτού του γινομένου, δηλαδή,

$$\{A,B\}_A = a\cdot b + b\cdot a \qquad (4.41)$$

χαρακτηρίζει μια ειδική μεταθετή Jordan άλγεβρα J. Ας θεωρήσουμε τώρα την κλασική πραγμάτωση του γινομένου $[a,b]_A$, δηλαδή, τη γνωστή Poisson-παρένθεση:

$$\left[A,B\right]_A = \frac{\partial A}{\partial r^{ka}}\frac{\partial B}{\partial p_{ka}}-\frac{\partial A}{\partial p_{ka}}\frac{\partial B}{\partial r^{ka}} \qquad (4.42)$$

Μια "συμμετρικοποιημένη" μορφή αυτής της παρένθεσης θα είναι :

$$\{A,B\}_A = \frac{\partial A}{\partial r^{ka}}\frac{\partial B}{\partial p_{ka}}+\frac{\partial A}{\partial p_{ka}}\frac{\partial B}{\partial r^{ka}} \qquad (4.43)$$

Αυτές όμως οι παρενθέσεις, αν και ικανοποιούν την μεταθετική ιδιότητα, <u>δεν</u> αποτελούν μια κλασική πραγμάτωση της μεταθετής Jordan-άλγεβρας, διότι παραβιάζουν την Jordan ιδιότητα, δηλαδή:

$$\left\{\{A,A\}_A ,B\right\}_A \neq \left\{\{A,A\}_A ,\{B,A\}_A\right\}_A$$
(4.44)

Σ' αυτό το σημείο βρίσκεται η δυσκολία της κατασκευής μιας κλασικής πραγμάτωση της Lie-επιδεκτής άλγεβρας, η οποία είναι επίσης και Jordan-επιδεκτή .

Στη συνέχεια ας εξετάσουμε, από μια ευρύτερη αλγεβρική θεώρηση, την μετάθεση-άλγεβρα $A(\lambda,\mu)$ με γινόμενο:

$$a*b=\lambda a\cdot b+\mu b\cdot a$$
(4.45)

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αυτή η άλγεβρα είναι συγχρόνως, flexible, Lie- και Jordan-επιδεκτή. Μια "παρόμοια" κλασική μορφή του γινομένου (4.45) σε μια διάσταση είναι :

$$A*B=\lambda\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial B}{\partial p}+\mu\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial r} \tag{4.46}$$

Η παρένθεση αυτή είναι Lie-επιδεκτή, δηλαδή, ικανοποιεί τις ιδιότητες (4.7). Όμως η παρένθεση (4.46) <u>δεν είναι</u> Jordan-επιδεκτή, διότι παραβιάζει την ιδιότητα:

$$(a^2b)a+a(a^2b) = a^2(ba)+a^2(ab)$$

Κατά βάθος η άλγεβρα U^+, η προσηρτημένη στην άλγεβρα U με γινόμενο (4.45) χαρακτηρίζεται από την παρένθεση:

$$\{A,B\}_U=(\lambda+\mu)\left[\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial B}{\partial p}+\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial r}\right]$$
(4.47)

η οποία παραβιάζει την Jordan ιδιότητα, όπως και στην περίπτωση της παρένθεσης (4.43). Για την περίπτωση της άλγεβρας U^- της προσηρτημένης στην U, έχουμε την παρένθεση :

$$[A,B]_U=(\lambda-\mu)\left[\frac{\partial A}{\partial r}\frac{\partial B}{\partial p}-\frac{\partial A}{\partial p}\frac{\partial B}{\partial r}\right]$$
(4.48)

η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες της Lie-άλγεβρας. Έτσι η U είναι Lie-επιδεκτή αλλά όχι συγχρόνως και Jordan-επιδεκτή.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.6 Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η παρένθεση (4.46) δεν είναι flexible. Επίσης η δομή αυτής της παρένθεσης, όταν επεκτείνεται σε περισσότερες από μια διάσταση, δηλαδή όταν τα λ και μ γίνουν πίνακες, παύει να είναι Lie-επιδεκτή. Με άλλα λόγια η Lie-επιδεκτικότητα αυτής της παρένθεσης εξαρτάται από την διάσταση της χωρικής συνιστώσας, που πρέπει να είναι 1.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι οι κλασικές πραγματώσεις της μεταθετής Jordan άλγεβρας η της Jordan-επιδεκτής άλγεβρας, δεν είναι τετριμμένη υπόθεση και απαιτείται περισσότερη μελέτη.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.7 Όπως θα δούμε αργότερα, η κατάσταση είναι διαφορετική στο κβαντομηχανικό επίπεδο. Πράγματι, ξέροντας ότι το γινόμενο (4.40) είναι μια κβαντομηχανική παράσταση του Lie γινομένου, είναι λογικό να περιμένουμε ότι μια κβαντομηχανική πραγμάτωση ενός Lie-επιδεκτού γινομένου θα μπορούσε να είναι της μορφής (4.45) και σαν τέτοια χαρακτηρίζει μια Lie και συγχρόνως Jordan-επιδεκτής άλγεβρας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.8 **Η έννοια της Lie-επιδεκτής άλγεβρας είναι το βασικό θεμέλιο της Lie θεωρίας**. Πράγματι, η θεμελιώδης Lie ιδιότητα βασίζεται ακριβώς στην έννοια της Lie-επιδεκτικότητας εκφραζόμενη στην πιο απλούστερη δυνατή μορφή της, την προσεταιριστική.

$$[X_i, X_j] = X_iX_j - X_jX_i = C^k_{ij} X_k \qquad (4.49a)$$

$$X_i = U_i^{\mu}(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha^{\mu}} \qquad (4.49b)$$

$$X_iX_j = \text{Προσεταιριστική Lie-επιδεκτή άλγεβρα} \qquad (4.49c)$$

Όμως μελετώντας την πραγμάτωση της Lie-άλγεβρας δια μέσου της Poisson παρένθεσης, αποδεικνύεται ότι η αρχική άλγεβρα είναι μια γενική, μη προσεταιριστική Lie-επιδεκτή άλγεβρα, όπως προκύπτει από την ιδιότητα ότι η παρένθεση :

$$A \times B = \frac{\partial A}{\partial r^{ka}}\frac{\partial B}{\partial p^{ka}} \qquad (4.50)$$

ικανοποιεί όλες τις συνθήκες για τον χαρακτηρισμό μιας άλγεβρας. Η άλγεβρα είναι μη προσεταιριστική επειδή

$$(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C) \qquad (4.51)$$

και τελικά η άλγεβρα είναι Lie-επιδεκτή, επειδή

$$[A,B] = A\times B - B\times A = \frac{\partial A}{\partial r^{ka}}\frac{\partial B}{\partial p^{ka}} - \frac{\partial B}{\partial r^{ka}}\frac{\partial A}{\partial p^{ka}} \qquad (4.52)$$

Δεν είναι παράλογο να πούμε ότι οι δυσκολίες για την εξακρίβωση μιας κλασικής πραγμάτωσης των Jordan και Jordan-επιδεκτών αλγεβρών, μπορεί να οφείλεται στη μη προσεταιριστικότητα της παρένθεσης (4.50). Επίσης η μη προσεταιριστικότητα της άλγεβρας, που υπόκειται στην Poisson-παρένθεση, σε σύγκριση με την προσεταιριστικότητα της άλγεβρας των τελεστών, που υπόκειται στις εξισώσεις του Heisenberg, είναι ένας από τους λόγους που δείχνει γιατί δεν έχει επιτευχθεί μέχρι τώρα μια πλήρης συνεπής κβάντωση.