ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΓΕΩΛΟΓΙΑΣ

Περιεχόμενα

1. ΓΕΝΙΚΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ

You know, I am sorry for the poor fellows that haven't got labs to work in.

Ernest Rutherford (1871-1937)

ΣΤΟΧΟΙ

Το εργαστήριο Φυσικής που συνδέεται με τη Φυσική Ι και ΙΙ έχει σαν κύριους στόχους: 1) να σας εξοικειώσει με τα φαινόμενα που θα μελετήσετε στο μάθημα και 2) να σας βοηθήσει να αναπτύξετε τις πειραματικές σας ικανότητες που θα χρησιμοποιήσετε σε όλη την πορεία σας στις θετικές επιστήμες.

Οι εργαστηριακές ασκήσεις που θα πραγματοποιήσετε δεν είναι «πειράματα» με την έννοια της διερεύνησης ενός άγνωστου φαινομένου αλλά έχουν επιλεγεί ώστε να επιδεικνύουν τα μελετούμενα φυσικά φαινόμενα και να αναδεικνύουν χρήσιμες μεθόδους προσδιορισμού των βασικών παραμέτρων τους. Γι αυτό η αξιολόγησή σας θα βασιστεί στην ικανότητα σας να κατανοήσετε τη φυσική της άσκησης, να πραγματοποιήσετε τις απαιτούμενες εργαστηριακές διαδικασίες και να παρουσιάσετε τις μετρήσεις σας με σαφή τρόπο, σχολιάζοντας τα αποτελέσματά, τα σφάλματα και τις αβεβαιότητες που υπεισέρχονται κάθε φορά.

ΟΡΓΑΝΩΣΗ

- Κάθε εργαστηριακή άσκηση πραγματοποιείται κάθε εβδομάδα με κυκλική εναλλαγή και έχει συνολική διάρκεια 2 ώρες π.χ. αν η πρώτη εργαστηριακή σας άσκηση είναι η 4, την επόμενη εβδομάδα θα πραγματοποιήσετε την 5 κ.ο.κ ώσπου να ολοκληρώσετε τον κύκλο των 7 ασκήσεων.
- Η παρακολούθηση είναι υποχρεωτική. Σε περίπτωση 1 απουσίας θα πρέπει να τη διακιολογήσετε στη γραμματεία <u>με χαρτί ιατρού</u> και να συννενοηθείτε με τον υπεύθυνο για να αναπληρώσετε το εργαστήριο σε κάποιο άλλο τμήμα (εάν υπάρχει κενή θέση) ή να προσέλθετε μετά την τελευταία εβδομάδα των εργαστηρίων για να την επαναλάβετε όταν πραγματοποιούνται συμπληρωματικές ασκήσεις. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορείτε να πραγματοποιήσετε περισσότερες

από μία ασκήσεις στα επαναληπτικά εργαστήρια κι άρα να έχετε **μία** μόνο απουσία την οποία να δικαιολογήσετε στη γραμματεία των εργαστηρίων.

ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ ΤΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Θα πρέπει να έχετε 2 τετράδια εργαστηρίου. Κάθε φορά θα φέρνετε μαζί σας το **ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ** και στο πρώτο μέρος θα σημειώνετε τις μετρήσεις σας, τα στάδια πραγματοποίησης και επεξεργασίας των πειραματικών σας αποτελεσμάτων της άσκησής σας και σχόλια που θα σας φανούν χρήσιμα στη συγγραφή της ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ η οποία θα πραγματοποιείται στο ίδιο ΤΕΤΡΑΔΙΟ (τα δύο είναι απαραίτητα ώστε να εναλλάσσονται μεταξύ του διορθωτή και του φοιτητή κάθε εβδομάδα, ένα παραδίδεται, ένα σας επιστρέφεται διορθωμένο). Τις μετρήσεις υπογράφει κάθε φορά ο επιβλέπων την άσκηση. Θα πρέπει

- να μελετάτε τη θεωρία της φυσικής με την οποία συνδέεται είτε από το βιβλίο Φυσικής που διδάσκεστε (Serway) είτε από άλλη πηγή.
- Να έχετε ετοιμάσει τις ασκήσεις-ερωτήσεις που αναφέρονται στην προετοιμασία της άσκησης που θα εκτελέσετε στο εργαστήριο και στην οποία θα εξεταστείτε προφορικά.
- να οργανώνετε μια λίστα των βημάτων που θα πραγματοποιήσετε (π.χ ρυθμίσεις οργάνων) και να απομονώνετε τα μεγέθη που θα μετρήσετε (δεδομένα)
- να προβλέπετε πώς θα μεταβάλλονται τα μετρούμενα μεγέθη (γραφική παράσταση), ποιούς πίνακες θα πρέπει να συμπληρώσετε με τα δεδομένα σας και πιθανόν μερικές χρήσιμες μαθηματικές σχέσεις. (Να έχετε μαζί σας **αριθμομηχανή, χάρακα, millimetre**).

Στην αρχή θα πρέπει να αναγνωρίζετε τα όργανα που θα χρησιμοποιήσετε και να εξοικειωθείτε με τις κλίμακές τους. Παρόλο που θα συνεργάζεστε με το συμφοιτητή σας, ο καθένας θα πρέπει να μπορεί να πραγματοποιεί το κάθε στάδιο λήψης δεδομένων μόνος του. Καταγράφετε τα δεδομένα σας με σαφή τρόπο, κρατώντας προσωπικές σημειώσεις για λεπτομέρειες που προσέχετε και δεν περιέχονται στο φυλλάδιο περιγραφής των ασκήσεων. Αν και τα όργανα που χρησιμοποιείτε είναι σχετικά απλά, να τα χειρίζεστε με τρόπο προσεκτικό για τη δική σας ασφάλεια και του εργαστηρίου.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΝΑΦΟΡΑ

Ένα μέρος της αξιολόγησής σας θα βασιστεί στην γραπτή αναφορά της εργαστηριακής άσκησης που θα πρέπει να παραδίδετε την επόμενη φορά σε αναφορά χειρόγραφη (αλλά ευδιάκριτη) στο **ΤΕΤΡΑΔΙΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟΥ**. Αυτό θα διορθώνεται, θα βαθμολογείται και θα σας επιστρέφεται την επόμενη εβδομάδα (πάντα θα έχετε ένα τετράδιο να γράφετε την επόμενη εργαστηριακή σας αναφορά). Σε περίπτωση που κατά την διόρθωση σημειώνεται να κάνετε επιπλέον διορθώσεις, θα ξαναγράφεται μόνο τα σημεία τα οποία χρειάζονται διόρθωση και όχι όλη την άσκηση).

Η αναφορά σας δεν θα πρέπει είναι εκτενής αλλά να περιέχει τα σημαντικά εκείνα στοιχεία του πειράματος, την ανάλυση των δεδομένων τα σχόλια και τα συμπεράσματά σας ώστε ένας άλλος συμφοιτητής σας που τη διαβάζει για πρώτη φορά να μπορεί να κατανοήσει πλήρως την περιγραφή της εργαστηριακής άσκησης.

Η αναφορά σας θα πρέπει να αναγράφει

Ονοματεπώνυμο
ΑΜ
Άσκηση
Ημέρα, Ώρα, Τμήμα
Ημερομηνία Άσκησης
Ημερομηνία Παράδοσης

- **Θεωρία** που αφορά στο πείραμά σας σύντομη και περιεκτική βασισμένη στο φυλλάδιο, είτε στό το βιβλίο Φυσικής που διδάσκεστε (Serway) είτε σε άλλη πηγή (έως1-2 σελίδες). Φτιάξτε τη δική σας περίληψη κάνοντας χρήση άλλων πηγών.
- **Πειραματική μέθοδος, Συσκευή, διάταξη**, Πειραματική μέθοδος: Περιγραφή πειραματικής διάταξης με σχήμα και σύντομη περιγραφή πειραματικής διαδικασίας (έως 1 σελίδα)
- **Διαδικασία, μετρήσεις**: ακολουθώντας τα βήματα του φυλλαδίου ή τυχόν επιπλέον που έχουν ζητηθεί από τον επιβλέποντα.
    i) καταγράφουμε τις μετρήσεις σε Πίνακα Μετρήσεων (βλ Υπόδειγμα Εργαστηριακής άσκησης),
    ii) εκτελούμε τους υπολογισμούς,

iii) εκφράζουμε τα αποτελέσματα με τα σφάλματά τους στις κατάλληλες μονάδες, κάνοντας τις απαραίτητες στρογγυλοποιήσεις .

- **Γραφική παράσταση** και πιθανός υπολογισμός κλίσης.
- **Σχολιασμός αποτελεσμάτων**, συμπεράσματα, αποκλίσεις από θεωρητικές τιμές.

Οι γραφικές παραστάσεις θα πρέπει να γίνονται σε χιλιοστομετρικό χαρτί. Μπορείτε να δείτε το παράδειγμα της εργαστηριακής αναφοράς στην υποενότητα 4 του παρόντος. Στη βαθμολόγηση της αναφοράς σας συνυπολογίζονται η κατανόηση και εξήγηση της πειραματικής διαδικασίας, η ποιότητα των μετρήσεων, η επεξεργασία των δεδομένων (υπολογισμοί), ο υπολογισμός των σφαλμάτων, οι γραφικές παραστάσεις και η εξαγωγή μεγεθών από αυτές, τα συμπεράσματα, τα σχόλια, η σύγκριση με θεωρητικές τιμές και η συνολική εμφάνιση της αναφοράς.

Η αναφορά που θα καθυστερεί θα μειώνεται βαθμολογικά (άριστα 8).

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑΣ

Ο Βαθμός του εργαστηρίου υπολογίζεται 1) την προφορική εξέταση κατά τη διάρκεια πραγματοποίησης της άσκησης. Αυτή αναφέρεται τόσο στην προετοιμασία όσο και στη διεξαγωγή της 2) την εργαστηριακή αναφορά και 3) 1-2 γραπτές εξετάσεις στην ύλη των ασκήσεων που πραγματοποιούνται κατά τη διάρκεια του εξαμήνου. Ο βαθμός της Φυσικής ΙΙ προκύπτει από τον αλγόριθμο:

Βαθμός Φυσικής ΙΙ= 0.8 x (βαθμός Φυσικής ΙΙ εξαμήνου) + 0.2 (Βαθμός Εργαστ.)

Παράδειγμα Βαθμολογίας		
Φυσική ΙΙ	**Εργαστήριο**	**Τελικός Βαθμός**
5	1	4.2
5	2	4.4
5	3	4.6
5	4	4.8
5	5	5
4	1	3.4
4	2	3.6
4	3	3.8
4	4	4
4	5	4.2
4	6	4.4
4	7	4.6

2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

1. Σφάλματα

Κάθε μέτρηση ενός φυσικού μεγέθους χαρακτηρίζεται από μία αβεβαιότητα που ονομάζουμε **σφάλμα ,** το οποίο αναγράφεται με τη μορφή

Τιμή ± αβεβαιότητα

π.χ έστω ότι σε ένα πείραμα μετράμε την τάση στα άκρα μιας αντίστασης και βρίσκουμε ότι είναι μεταξύ 20.2 V και 20.4 V. Θα γράψουμε την εκτίμησή μας ως $20.3V \pm 0.1V$ όπου 20.3 είναι η περισσότερο πιθανή τιμή της τάσης και ±0.1 **το σφάλμα (η αβεβαιότητα)** της μέτρησης.

Με τον όρο σφάλμα δεν εννοούμε την απόκλιση της μέτρησής μας από την θεωρητικά αποδεκτή τιμή ούτε το πειραματικό λάθος. Η έννοια του σφάλματος αναφέρεται στην ακρίβεια της μέτρησης δηλαδή στην αβεβαιότητα των μετρήσεων την οποία εισάγουν

- τα όργανα μέτρησης
- η πειραματική διαδικασία και οι συνθήκες του πειράματος

Επειδή κατά την πειραματική διαδικασία υπάρχουν παράγοντες που υπεισέρχονται που δεν τους γνωρίζουμε ή δεν μπορούμε να τους λάβουμε υπόψιν (π.χ μεταβολή του g, της θερμοκρασίας) δεν μπορούμε πάντα να διορθώσουμε όλα τα σφάλματα. Ακόμα κι αν επαναλάβουμε τις μετρήσεις ενός μεγέθους, τα σφάλματα δεν μπορούν να εξαλειφθούν, μπορούμε όμως να οδηγηθούμε σε μία κατανομή των μετρούμενων τιμών που μπορεί να αναλυθεί συστηματικά με τη στατιστική.

Από την άλλη είναι εμφανές ότι τα σφάλματα πρέπει να υπολογίζονται ώστε να οδηγηθούμε σε ορθά συμπεράσματα.

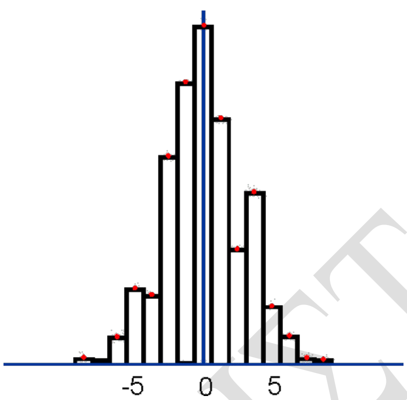
Παράδειγμα Εάν μετρήσουμε την ωμική αντίσταση για δύο θερμοκρασίες, για $\theta=25^o$ C R=23.17 kOhm ενώ για $\theta=80^o$ C R=22.61 kOhm δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πώς μεταβάλλεται η R(θ), παρά μόνο εάν οι μετρούμενες τιμές συνοδεύονται από το σφάλμα τους δηλαδή για $\theta=25^o$ C R=23.17±0.04 kOhm ενώ για $\theta=80^o$ C R=22.61 ±0.04 kOhm (παρατηρείστε ότι δε θα φτάναμε σε συμπέρασμα εάν το σφάλμα αναγραφόταν ως για $\theta=25^o$ C R=23.17±0.6 kOhm και για $\theta=80^o$ C R=22.61 ±0.6 kOhm**)**

2. Είδη σφαλμάτων

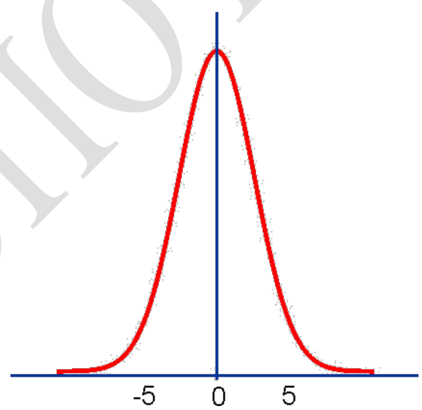
Συστηματικά σφάλματα: πρόκειται για σφάλματα που σχετίζονται με την αξιοπιστία μιας μέτρησης και μπορεί να οφείλονται στην κακή βαθμονόμηση των οργάνων, στη λανθασμένη χρήση των οργάνων ή στην παράβλεψη ορισμένων φαινομένων ή σε εξωτερικά αίτια που μπορεί να αλλάξουν τα αποτελέσματα του πειράματος (υγρασία, πίεση, θερμοκρασία κ.λ.π). Τα συστηματικά σφάλματα τείνουν να μετατοπίσουν όλες τις μετρήσεις με συστηματικό τρόπο έτσι ώστε η μέση τιμή να είναι μετατοπισμένη προς μία διεύθυνση π.χ εάν ένας χάρακας είναι φθαρμένος, η μέτρηση κάθε μήκους θα έχει σταθερό συστηματικό σφάλμα που είναι ανεπηρέαστο από την επαναληψιμότητα της μέτρησης. Ο μόνος τρόπος να ποσοτικοποιήσω το σφάλμα δηλαδή να εκτιμήσω σωστά την τάξη μεγέθους του είναι να συγκρίνω το όργανο που χρησιμοποιώ με άλλο που θεωρείται πρότυπο. Σε ένα σωστό πείραμα τα μεγάλα συστηματικά σφάλματα περιορίζονται με σύγκριση των τιμών με διαφορετικές μεθόδους.

Τυχαία σφάλματα: πρόκειται για σφάλματα που σχετίζονται με την ακρίβεια μιας μέτρησης και δείχνουν τις διακυμάνσεις που έχουν οι μετρήσεις ενός επαναλαμβανόμενου πειράματος που γίνεται κάτω από τις ίδιες φαινομενικά συνθήκες και τα οποία οδηγούν στην κατανομή των αποτελεσμάτων γύρω από μία μέση τιμή. Μπορεί να οφείλονται στην έλλειψη ευαίσθητης απόκρισης του οργάνου ή στον παρατηρητή (σφάλματα ανάγνωσης), στον εξωτερικό «θόρυβο», ή σε στατιστικές διαδικασίες (όπως είναι η ρίψη ενός ζαριού). **Τα τυχαία σφάλματα είναι αναπόφευκτα και περιγράφονται με τη στατιστική θεωρία.**

Σύμφωνα με τη στατιστική θεωρία εάν ένα φαινόμενο είναι πράγματι τυχαίο τότε η οριακή κατανομή που θα προκύψει (μετά από άπειρες προσπάθειες) θα είναι μια κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss. Η κατανομή Gauss είναι ίσως η πιο κοινή κατανομή στη θεωρία των πιθανοτήτων δηλαδή εάν επαναλάβουμε ένα πείραμα (π.χ ρίχνοντας ένα βέλος να πετύχουμε το 0), το αποτέλεσμα που παίρνουμε για π.χ 100 προσπάθειες φαίνεται στο σχήμα 1 ενώ για άπειρες στο σχήμα 2 και περιγράφεται μαθηματικά από την καμπύλη



σχήμα (1)



σχήμα (2)

ή από τη σχέση

$$P(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}$$

που εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα x όπου x_o είναι η πιο πιθανή τιμή και σ η τυπική απόκλιση (βλ. Παράρτημα, στοιχεία από τη θεωρία των πιθανοτήτων) που καθορίζει το εύρος της κατανομής. Αυτήν την κατανομή ακολουθούν τα τυχαία σφάλματα και γι αυτό με προσέγγιση της κατανομής των μετρήσεων με κατανομή Gauss, η τυπική απόκλιση αποτελεί τον τρόπο που εκφράζεται το **σφάλμα**.

Όλα τα σφάλματα που προσδιορίζουμε στο εργαστήριο ποσοτικά είναι πάντοτε τυχαία.

3. Μέση τιμή και σφάλμα

Επειδή σε πολλές περιπτώσεις, όταν μετρούμε πολλές φορές, στις ίδιες συνθήκες την ίδια ποσότητα βρίσκουμε διαφορετικά αποτελέσματα, βρίσκουμε τη **μέση τιμή** και το **απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής (ή τυπική απόκλιση της μέσης τιμής)**.
Εάν σε ένα πείραμα η μέτρηση του μεγέθους x επαναληφθεί N φορές, και οι μετρούμενες τιμές είναι $x_1, x_2, x_3, \ldots x_N$, τότε ως πραγματική θεωρούμε την μέση τιμή

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_k + \ldots x_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k}{N}$$

Εάν τα σφάλματα των παραπάνω μετρήσεων είναι τυχαία θα διαφέρουν ως προς το πρόσημο και ως προς το μέγεθος. Έτσι στον υπολογισμό της μέσης τιμής κάποια από τα τυχαία σφάλματα αλληλοαναιρούνται στο άθροισμα. Η επανάληψη πολλών μετρήσεων είναι και ο καλύτερος τρόπος περιορισμού των τυχαίων σφαλμάτων. Επιπλέον μπορεί να υπολογιστεί η απόκλιση των μετρήσεων από τη μέση τιμή. Το απόλυτο σφάλμα της μέσης τιμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει τη βεβαιότητα των N μετρήσεων μας για τη μέση τιμή του x δηλαδή γράφοντας $\bar{x} \pm \delta\bar{x}$ όπου

$$\delta\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum_{k}\left(x_k - \bar{x}\right)^2}{N(N-1)}}$$

Άρα συνολικά ο σωστός τρόπος αναγραφής της μετρούμενης τιμής είναι

Τιμή ± σφάλμα ± συστηματικό σφάλμα

Εάν υποθέσουμε ότι μετράμε το μήκος της ακμής ενός παραλληλεπιπέδου και βρίσκουμε

$\bar{L} \pm \delta\bar{L} = 9.6 \pm 0.3\text{cm}$ και ενός στύλου και βρίσκουμε $\bar{H} \pm \delta\bar{H} = 26681.5 \pm 0.3\text{cm}$
Μπορούμε να πούμε ποια μέτρηση είναι πιο ακριβής αν και οι δύο έχουν το ίδιο απόλυτο σφάλμα (0.3 cm); Γι αυτό ορίζουμε το **σχετικό σφάλμα της μέσης τιμής** ως $\frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$ που συνήθως αναφέρεται ως ποσοστό επί τοις εκατό δηλαδή $\sigma_{\sigma\chi}\% = \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}100$

Στο παραπάνω παράδειγμα για το παραλληλεπίπεδο θα είναι

$$\frac{\delta\bar{L}}{\bar{L}} = \frac{0.3}{9.6} = 0.031 = 3.1\% \sim 3\%$$

Ενώ για το στύλο

$$\frac{\delta\bar{H}}{\bar{H}} = \frac{0.3}{26681.5} = 0.00011 = 0.011\% = 0.01\%$$

Άρα η μέτρηση του στύλου είναι ακριβέστερη.
Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ενώ το απόλυτο **σφάλμα της μέσης τιμής** έχει τις μονάδες του μετρούμενου μεγέθους, το σχετικό είναι αδιάσειστο μέγεθος. Μπορείτε να ανατρέξετε στο Παράρτημα για να μελετήσετε αναλυτικότερα τους τρόπους ορισμού των σφαλμάτων των μετρούμενων τιμών ενός πειράματος και τη στατιστική σημασία τους για ένα δείγμα τιμών.

Παράδειγμα

Σε ένα πείραμα καταμέτρησης κοσμικών ακτίνων που προσπίπτουν σε έναν ανιχνευτή ανά ώρα, έγιναν εννέα μετρήσεις και τα αποτελέσματα καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα. Έτσι

i	$\mathbf{x_i}$	$(\mathbf{x_i} - \bar{x})^2$
1	80	400
2	95	25
3	100	0
4	110	100
5	90	100
6	115	225
7	85	225
8	120	400
9	105	25
Σ	900	1500

$$\bar{x} = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{900}{9} = 100$$

και $\delta\bar{x} = \sqrt{\dfrac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} = \sqrt{\dfrac{1500}{8}} = \sqrt{188} = 14$

Άρα τελικά ο αριθμός των κοσμικών ακτίνων που μετρήθηκαν είναι x =100±14 με σφάλμα 14/100 =14%

4. Σημαντικά ψηφία

Για την καταγραφή των πειραματικών δεδομένων και των υπολογιστικών αποτελεσμάτων θα πρέπει να χρησιμοποιείται ο σωστός αριθμός των σημαντικών ψηφίων. Σημαντικά ψηφία ενός μετρούμενου ή υπολογιζόμενου μεγέθους είναι το πλήθος των ψηφίων της τα οποία είναι επαναλήψιμα κατά τη μετρητική διαδικασία. Συνήθως είναι τα ψηφία που γνωρίζουμε με ακρίβεια εκτός από τα μηδενικά που δείχνουν το δεκαδικό σημείο. Συνήθως το πλήθος των σημαντικών ψηφίων ενός μετρούμενου μεγέθους ταυτίζεται με την ακρίβεια των οργάνων μέτρησης. Έτσι σε ένα χάρακα με χαραγές κάθε 1 cm και με μικρότερες υποδιαιρέσεις κάθε 0.1 cm η εκτίμησή μας (κατά 0.01 cm) αντιπροσωπεύει και το τελευταίο σημαντικό ψηφίο της μέτρησης. **Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το πλήθος των σημαντικών ψηφίων ενός αριθμού μας δίνει ένα μέτρο της ακρίβειας ενός πειραματικού αποτελέσματος**.

Για την ορθή αναφορά των σημαντικών ψηφίων υπάρχουν οι εξής κανόνες:

- Ως πρώτο σημαντικό ψηφίο μετράμε το αριστερότερα μη μηδενικό.
- **Εάν υπάρχει υποδιαστολή** ως τελευταίο σημαντικό είναι αυτό που βρίσκεται δεξιότερα (ακόμα κι αν είναι μηδενικό) δηλαδή σημαντικά είναι όλα τα ψηφία **από το πρώτο μη μηδενικό και μετά** π.χ 0.000034 (2), 2.00 (3) 0.050 (2).

- **Εάν δεν υπάρχει υποδιαστολή** ως τελευταίο σημαντικό είναι το δεξιότερο μη μηδενικό δηλαδή σημαντικά είναι όλα τα ψηφία **απο το πρώτο αριστερά μέχρι το τελευταίο μη μηδενικό** 1 892 (4), 4023 (4), 400 (1), 15000 (2).

Όπως φαίνεται στο παράδειγμα στους ακέραιους αριθμούς τα μηδενικά μπορεί να είναι ή να μην είναι σημαντικά γι αυτό πρέπει να διευκρινίζονται π.χ 4.00 (3 σημαντικά ψηφία) 15000 (2 σημαντικά ψηφία) γράφοντας τον αριθμό σε εκθετική μορφή οπότε τότε όλα τα ψηφία που εμφανίζονται πριν από την δύναμη του 10 θεωρούνται σημαντικά δηλαδή 4×10^2 (1 σημαντικό ψηφίο) ή 1.00×10^6 ο αριθμός έχει μετρηθεί με ακρίβεια, που αντιστοιχεί σε (3 σημαντικά ψηφία) δηλαδή ο αριθμός έχει μετρηθεί με ακρίβεια, που αντιστοιχεί σε 3 σημαντικά ψηφία).

5. Σημαντικά ψηφία και αριθμητικές πράξεις

Το αποτέλεσμα που προκύπτει από την εκτέλεση των μαθηματικών πράξεων καθορίζεται από τον όρο που έχει τη μικρότερη ακρίβεια.

- Μετά την **πρόσθεση ή αφαίρεση** το πλήθος των **δεκαδικών** ψηφίων του αποτελέσματος καθορίζεται από τον αριθμό που έχει τον μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων π.χ 89.332+1.1=90.432 ~ 90.4
  Το 90.4 καθορίζεται από το γεγονός ότι το μικρότερο αριθμό δεκαδικών ψηφίων από τους δύο όρους έχει το 1.1.
- Μετά **τον πολλαπλασιασμό ή τη διαίρεση** το πλήθος των **σημαντικών** ψηφίων του αποτελέσματος καθορίζεται από τον αριθμό με τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων. π.χ.
  (2.80) x (4.5039) = 12.61092 ~ 12.6. Το 12.6 (3 σημαντικά) καθορίζεται από το γεγονός ότι τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων από τους δύο όρους έχει το 2.80 (3 σημαντικά)

6. Σημαντικά ψηφία, σφάλματα και στρογγυλοποιήσεις

Στην αναφορά των πειραματικών αποτελεσμάτων στο Εργαστήριο δηλαδή στην αναφορά της μέτρησης (ή της μέσης τιμής των μετρήσεων) και το πειραματικό σφάλμα της, χρησιμοποιούμε στρογγυλοποιημένες τιμές απορρίπτουμε δηλαδή τα ψηφία που δεν είναι σημαντικά ακολουθώντας τους παρακάτω κανόνες στρογγυλοποίησης

- **Αρχίζουμε την στρογγυλοποίηση από το σφάλμα**
- **Κατά τη στρογγυλοποίηση του σφάλματος κρατάμε ένα σημαντικό ψηφίο (εάν οι μετρήσεις είναι N<20) εκτός εάν αυτό είναι το 1 ή το 2 οπότε κρατάμε δύο σημαντικά ψηφία.(ΠΡΟΣΟΧΗ ΕΝΑ σημαντικό και ΟΧΙ ένα δεκαδικο!)**
- **Στρογγυλοποιούμε τη μέση τιμή κρατώντας τόσα δεκαδικά ψηφία όσα είναι και του σφάλματος. Δηλαδή η μέτρηση ή η μέση τιμή των μετρήσεων και του σφάλματος αναγράφονται με την ίδια ακρίβεια.**

Αναλυτικότερα κατά τη στρογγυλοποίηση του σφάλματος

- Βρίσκουμε το σημαντικό ψηφίο που μας ενδιαφέρει
- Εξετάζουμε το αμέσως επόμενο
- Αν αυτό είναι >5 αυξάνουμε το σημαντικό κατά μία μονάδα και παραλείπουμε τα υπόλοιπα

- Αν αυτό είναι < 5 αφήνουμε το σημαντικό όπως είναι και παραλείπουμε τα υπόλοιπα
- Αν αυτό είναι = 5 εξετάζουμε τι υπάρχει μετά
  - Αν υπάρχει έστω και 1 ψηφίο >0 αυξάνουμε το σημαντικό κατά μία μονάδα και παραλείπουμε τα υπόλοιπα
  - Αν δεν υπάρχει ούτε 1 ψηφίο >0 κάνουμε ότι θέλουμε (είτε αυξάνουμε, είτε αφήνουμε όπως είναι).

Παραδείγματα

	$\delta\overline{x}$	$\delta\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{x}\pm\delta\overline{x}$
43.0319 sec	**0.0429 sec**	**0.04 sec**	**43.03 sec**	**(43.03±0.04) sec**
0.017465 g	**0.000498 g**	**0.0005 g**	**0.0175 g**	**(0.0175±0.0005) g**
24.84888 m	**0.24976 m**	**0.25 m**	**24.85 m**	**(24.85±0.25) m**
2357.46 m/s	**58.432 m/s**	**60 m/s**	**2360 m/s**	**(2360±60) m/s**
4118572.3 sec	**2777.289 sec**	**2800 sec**	**4118600 sec**	**(4118600±2800) sec**
7 400 g	**0.00815 g**	**0.008 g**	**7400 g**	**(7400±0.008) g**

Καλό θα είναι να κρατάμε ένα ακόμα ψηφίο πέραν του σημαντικού στις τιμές που υπεισέρχονται στις αριθμητικές πράξεις για να ελαχιστοποιήσουμε τα σφάλματα στρογγυλοποίησης.
Στις μαθηματικές ή φυσικές σταθερές ή γενικά στα μεγέθη που θεωρούνται γνωστά δεν αναφέρεται σφάλμα π.χ το π στον υπολογισμό του εμβαδού.

7. Διάδοση των σφαλμάτων

Εάν ένα μέγεθος z εξαρτάται από (μία ή) δύο μετρούμενες ποσότητες (x και y) ή και περισσότερες οι οποίες έχουν μέσες τιμές $\overline{x},\overline{y}$ και ανεξάρτητα σφάλματα ($\delta\overline{x},\delta\overline{y}$ αντίστοιχα) τότε υπολογίζουμε το σφάλμα του με τον κανόνα διάδοσης των σφαλμάτων

$$\delta\overline{z}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\overline{x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\delta\overline{y}\right)^2}$$

Όπου $\frac{\partial}{\partial x}$ η μερική παράγωγος ως προς x. Αναλυτικότερα οι κανόνες υπολογισμού των σφαλμάτων περιλαμβάνονται στον παρακάτω πίνακα για μία σειρά απλών μαθηματικών σχέσεων.

Διάδοση σφαλμάτων

	Σχέση μεταξύ Z και (x,y)	**Σχέση μεταξύ των σφαλμάτων Δz και** $\delta\overline{x},\delta\overline{y}$
1	z=x+y z=x-y	$\delta\overline{z}^2=\delta\overline{x}^2+\delta\overline{y}^2$

2	z=xy z=x/y	$\left(\frac{\delta\overline{z}}{\overline{z}}\right)^2=\left(\frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\right)^2\pm\left(\frac{\delta\overline{y}}{\overline{y}}\right)^2$
3	$z=x^n$	$\left(\frac{\delta\overline{z}}{\overline{z}}\right)=n\left(\frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\right)$
4	z=lnx	$\delta\overline{z}=\left(\frac{\delta\overline{x}}{\overline{x}}\right)^2$
5	$z=e^x$	$\left(\frac{\delta\overline{z}}{\overline{z}}\right)=\delta\overline{x}$
6	$z=\frac{x+y}{2}$	$\delta\overline{z}=\frac{1}{2}\sqrt{\delta\overline{x}^2+\delta\overline{y}^2}$

Για την καταγραφή των μετρήσεων χρησιμοποιούμε ΠΑΝΤΑ πίνακες

Παράδειγμα

Υπολογισμός της επιτάχυνσης κατά την ευθύγραμμη, ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση από τη σχέση $\alpha=2s/t^2$. Έστω ότι μετράμε

s =12.0±0.10 m

t =35.20 ±0.5 s

Τότε $\delta\overline{a}=\sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial s}\delta\overline{s}\right)^2+\left(\frac{\partial a}{\partial t}\delta\overline{t}\right)^2}$

$\frac{\partial a}{\partial s}=\frac{2}{\overline{t}^2}=\frac{2}{(35.2)^2}$ και $\frac{\partial a}{\partial t}=-\frac{4\overline{s}}{\overline{t}^3}=-\frac{4\cdot 12}{(35.2)^3}$

Άρα κάνοντας τις πράξεις $\overline{a}=0.488...\text{m/s}^2$ και $\delta\overline{a}=0.0407\,\text{m/s}^2$

Οπότε $\boxed{a=0.49\pm0.04\ \text{m/s}^2}$

8. Τρόπος αναγραφής Αποτελεσμάτων

Ανακεφαλαιώνοντας θα πρέπει στην αναγραφή των πειραματικών αποτελεσμάτων να προσέχουμε τα εξής:

1. Μέση τιμή
2. Τα σφάλματά της (απόλυτο και σχετικό) με τη μορφή (± σφάλμα)
3. τις μονάδες μέτρησης (όπου υπάρχουν)
4. τον κανόνα του «σημαντικού ψηφίου
5. τον κανόνα της ίδιας ακρίβειας για τη μέση τιμή και το σφάλμα της

Αναφορά με το απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής

$\overline{x}\pm\delta\overline{x}=(83.5\pm0.2)\text{m/s}^2$

Αναφορά με το σχετικό σφάλμα μέσης τιμής

$\overline{x}\pm\sigma_{\sigma\chi}\%=83.5\,\text{m/s}^2\pm0.2\%$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ: Στοιχεία από τη θεωρία των πιθανοτήτων

1. Είδη σφαλμάτων

Υπάρχουν πολλοί τρόποι με τους οποίους μπορεί να περιγραφεί η κατανομή των μετρούμενων τιμών ενός πειράματος.

Μέγιστο σφάλμα

Προσδιορίζοντας τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή μία ομάδας δεδομένων, x_{max} και x_{min} το μέγιστο σφάλμα ορίζεται ως η ποσότητα

$$\Delta x_{max} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2}$$

Υποθετικά καμία τιμή δεν θα πρέπει να είναι έξω από

$$\bar{x} \pm \Delta x_{\max}$$

Πιθανό σφάλμα

Το πιθανό σφάλμα $\Delta x_{\pi\iota\theta}$ καθορίζει το διάστημα $\bar{x} \pm \Delta x_{\pi\iota\theta}$, το οποίο περιέχει το 50% των μετρούμενων τιμών.

Μέση Απόκλιση

Η μέση απόκλιση είναι η μέση τιμή των αποκλίσεων από τη μέση τιμή των μετρήσεων,

$$\Delta x_{\mu} = \frac{\sum_{k} \left| x_k - \bar{x} \right|}{N}$$

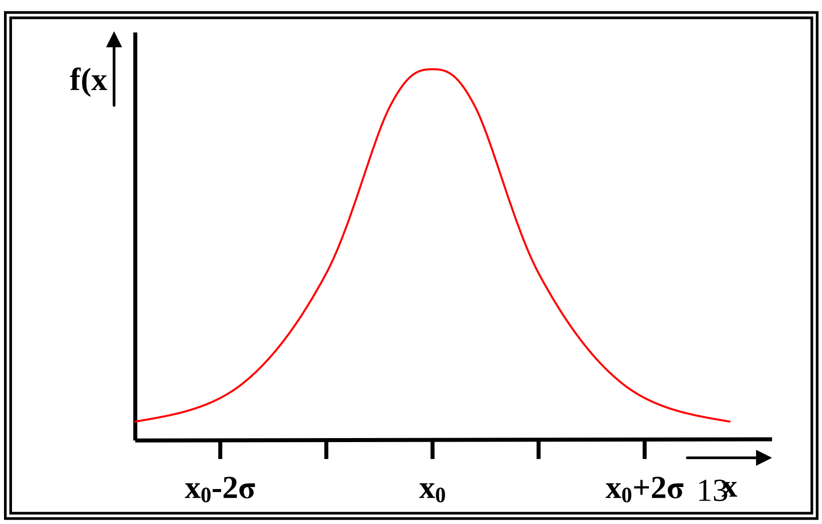
Αν οι μετρήσεις ακολουθούν κατανομή Gauss, περίπου το 58% θα βρίσκεται στο διάστημα $\bar{x} \pm \Delta x_{\mu}$

Τυπική απόκλιση

Εάν οι μετρήσεις ακολουθούν κατανομή Gauss, η πιθανότητα να συμβεί το αποτέλεσμα x είναι

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-x_o)^2}{2\sigma^2}}$$

όπου x_o είναι η πιο πιθανή τιμή και σ η τυπική απόκλιση που καθορίζει το εύρος της κατανομής. Αυτήν την κατανομή ακολουθούν τα τυχαία σφάλματα και γι αυτό με προσέγγιση της κατανομής των μετρήσεων με κατανομή Gauss η τυπική απόκλιση αποτελεί τον τρόπο που εκφράζεται το **σφάλμα .**



2. Τυπική απόκλιση

Η μέση τιμή είναι η πιο πιθανή τιμή μίας κατανομής Gauss. Η τυπική απόκλιση τότε εκφράζεται σε σχέση με τη μέση τιμή ως

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_k \left(x_k - \bar{x}\right)}{N}}$$

Η ποσότητα σ^2, δηλαδή το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης, ονομάζεται ***διασπορά.*** Η πιο καλή εκτίμηση της αληθινής τυπικής απόκλισης είναι

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_k \left(x_k - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$$

Ο λόγος που διαιρούμε με N για την εκτίμηση της μέσης τιμής και με N-1 για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης από τη μέση τιμή είναι ο εξής: Για τον υπολογισμό της διασποράς δεν χρησιμοποιείται η αληθινή μέση τιμή του x αλλά η καλύτερη εκτίμησή της δηλαδή ο μέσος όρος των μετρήσεων. Έτσι η υπολογιζόμενη ποσότητα $\left(x_k - \bar{x}\right)^2$ είναι πάντα λίγο μικρότερη από την επιθυμητή $\left(x_k - \bar{x}_{\alpha\lambda\eta\theta}\right)^2$. Στη θεωρία των πιθανοτήτων (χρησιμοποιώντας δηλαδή την υπόθεση ότι οι μετρήσεις ακολουθούν κατανομή Gauss) αποδεικνύεται ότι αυτή η υποτίμηση διορθώνεται χρησιμοποιώντας N-1 αντί για N.

Εάν πραγματοποιηθεί άλλη μία μέτρηση του x τότε (ιδιότητα της κατανομής Gauss) αυτή θα είχε πιθανότητα περίπου 68% να βρίσκεται στο διάστημα $\bar{x} \pm \sigma_\chi$.

Ποιά είναι η πιθανότητα η μέση τιμή που υπολογίσαμε και η οποία βασίζεται σε μικρό αριθμό μετρήσεων να βρίσκεται κοντά στην αληθινή μέση τιμή που βασίζεται σε ένα μεγάλο (άπειρο) αριθμό μετρήσεων; Η απάντηση βρίσκεται στην ακόλουθη διαπίστωση: Ανάμεσα στις μετρήσεις πολλών παρατηρητών που καταλήγουν σε διαφορετική μέση τιμή και διαφορετική τυπική απόκλιση, υπάρχει μία πιο στενή διασπορά των μέσων τιμών σε σχέση με τη διασπορά των μεμονωμένων μετρήσεων. Δηλαδή, η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών είναι μικρότερη από τις τυπικές αποκλίσεις των μεμονωμένων μετρήσεων. Αυτή η τυπική απόκλιση των μέσων τιμών δίνει την πιθανότητα του παραπάνω ερωτήματος και υπολογίζεται από τη θεωρία ως:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_R \left(x_R - \bar{x}\right)^2}{N(N-1)}}$$

και ονομάζεται **τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής (ή απόλυτο σφάλμα μέσης τιμής)**. Άρα ενδιαφερόμαστε για το σφάλμα της μέσης τιμής, το οποίο είναι μικρότερο από σ_x εάν υπήρχαν πολλές μετρήσεις π.χ εάν υπάρχουν 20 μετρήσεις, το σφάλμα της μέσης τιμής θα είναι $\sqrt{20} = 4.47$ φορές μικρότερο από το σφάλμα κάθε μέτρησης.

Το σφάλμα της μέσης τιμής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει τη βεβαιότητα των N μετρήσεων μας για τη μέση τιμή του x δηλαδή γράφοντας $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ όπου $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$. σημαίνει ότι εάν επαναληφθούν οι N μετρήσεις του x θα υπάρχει

68% πιθανότητα η καινούρια μέση τιμή $\bar{x}$ να βρίσκεται μέσα στο διάστημα $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$ (δηλαδή μεταξύ $\bar{x}+\sigma_{\bar{x}}$ και $\bar{x}-\sigma_{\bar{x}}$). Σημαίνει επίσης ότι υπάρχει 32% πιθανότητα να είναι έξω από αυτό το διάστημα. Δηλαδή στα 100 τέτοια πειράματα, κατά μέσο όρο τα 32 θα καταλήξουν σε μία τιμή έξω από τα τυπικά σφάλματα.
Για μια κατανομή Gauss υπάρχει περίπου 90% πιθανότητα η αληθινή τιμή να βρίσκεται στο διάστημα $\bar{x}+2\sigma_{\bar{x}}$ δηλαδή σε διάστημα διπλάσιο από το τυπικό σφάλμα και μόνο 0.3% να είναι έξω από το διάστημα $\pm 3\sigma_{\bar{x}}$.

Παράδειγμα

Σε ένα πείραμα καταμέτρησης κοσμικών ακτίνων που προσπίπτουν σε έναν ανιχνευτή ανά ώρα , έγιναν εννέα μετρήσεις και τα αποτελέσματα καταγράφονται στον παρακάτω πίνακα. Έτσι

i	**x_i**	**$(x_i-\bar{x})^2$**
1	80	400
2	95	25
3	100	0
4	110	100
5	90	100
6	115	225
7	85	225
8	120	400
9	105	25
Σ	900	1500

$\bar{x}$ =900/9=100 και σ_x^2 =1500/8 =188 ή $\sigma_x = 14$.
Άρα η πιθανότητα να υπάρχει μία μέτρηση του x στο διάστημα 100 ± 14 είναι 68%. Η τιμή που προσδιορίζει αυτό το set μετρήσεων είναι $100 \pm 14/\sqrt{9}$ ή 100 ± 5. Εάν κάποιος κάνει άλλες εννέα μετρήσεις του x , η νέα μέση τιμή έχει 68% πιθανότητα να βρίσκεται στο διάστημα 100 ± 5.
Διαδικασίες τυχαίας καταμέτρησης όπως αυτό το παράδειγμα υπακούουν στην κατανομή Poisson για την οποία $\sigma_x = \sqrt{\bar{x}}$. ‘Άρα η αναμενόμενη τιμή του σ_x είναι 10. Αυτή είναι μικρότερη από την τιμή 14, γεγονός που δείχνει είτε ότι η διαδικασία δεν τελείως τυχαία ή –πιθανότερο- χρειάζονται και άλλες μετρήσεις.
Η ίδια ανάλυση σφάλματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για κάθε set επαναλαμβανόμενων μετρήσεων είτε τα σφάλματα προέρχονται από τυχαίες διαδικασίες είτε όχι. Για παράδειγμα αν σε ένα πείραμα απαιτείται η μέτρηση του χρόνου t 5 φορές . Η μέση τιμή του χρόνου θα είναι

$$\bar{t} = \frac{\Sigma t_i}{5} = \frac{t_1+t_2+t_3+t_4+t_5}{5}$$

και το τυπικό σφάλμα της μέσης τιμής είναι

$$\sigma\bar{t} = \sqrt{\frac{\sum (t_i-\bar{t})^2}{n(n-1)}}$$

όπου n=5

Αναφορές

Taylor, J.R., An Introduction to Error Analysis (A series of Books in Physics, Commins, Eugene, D., Editor University Sciences Books, Mill Valley, California).

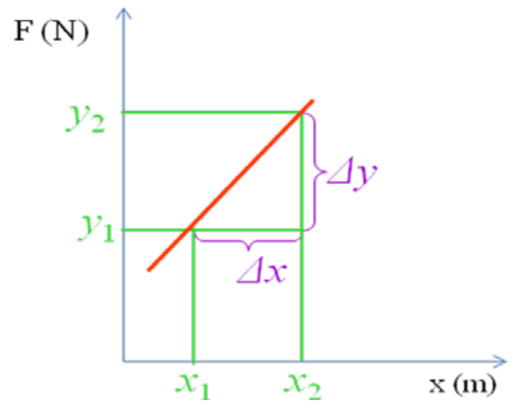
www.cc.uoa.gr/~ctrikali/sfalmata/sfalmata.htm

3. Γραφικές Παραστάσεις

Η γραφική παράσταση σχεδιάζεται πάντα σε χιλιοστομετρικό χαρτί (millimetré).
Κατά το σχεδιασμό των γραφικών παραστάσεων στο χιλιοστομετρικό χαρτί θα πρέπει να προσέχετε τα εξής:

1. Η γραφική παράσταση θα πρέπει να έχει τίτλο. Σε κάθε άξονα θα πρέπει να αναγράφεται το **μετρούμενο μέγεθος** που παριστάνεται και οι **μονάδες** του.
2. Οι κλίμακες των δύο αξόνων θα πρέπει να επιλέγονται ώστε τα δεδομένα να παριστάνονται ευκρινώς π.χ αν όλα τα δεδομένα είναι της τάξης του 10^{-2}, τότε αναγράφεται στην κλίμακα του αντίστοιχου άξονα (x 10^{-2}) . Επίσης θα πρέπει να διαλέγετε την κατάλληλη κλίμακα ώστε οι μετρήσεις να καταλαμβάνουν όλο το εύρος της και να μην είναι συγκεντρωμένα μόνο σε ένα τμήμα της.
3. Τα πειραματικά σημεία **ΔΕΝ** αναγράφονται στους άξονες, ούτε πάνω στη γραφική παράσταση οι τιμές τους, ούτε υπάρχουν διακεκομμένες που να τα ενώνουν με τους άξονες.
4. ΔΕΝ ενώνονται τα πειραματικά σημεία. Η καμπύλη ή ευθεία θα πρέπει να περνάει ανάμεσα στα πειραματικά σημεία τα οποία παριστάνονται με μία τελεία, σταυρό κ.λ.π. Σε περιπτώσεις που πρέπει να σχεδιάσετε καμπύλη χρησιμοποιήστε καμπυλόγραμμο. Ο αναλυτικός σχεδιασμός της πειραματικής ευθείας απαιτεί την εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων την οποία μπορείτε να μελετήσετε αλλά δεν θα την εφαρμόσετε σ΄ αυτό το εργαστήριο.

5. Υπολογισμός κλίσης



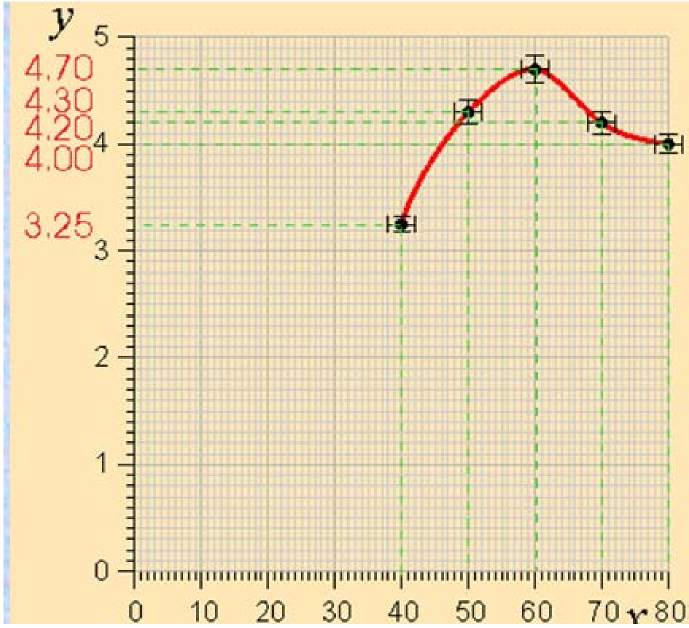
- Χρησιμοποιώντας 2 τυχαία σημεία σχηματίζουμε ορθογώνιο τρίγωνο, οι κάθετες πλευρές του οποίου είναι παράλληλες προς τους άξονες *x* και *y*.
- Χρησιμοποιώντας τις κλίμακες που έχουμε ορίσει στους άξονες βρίσκουμε τα x_1, x_2, y_1 και y_2, που μας δίνουν τα μήκη Δx και Δy.
- Κλίση $= \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
- Όταν υπολογίζεται η **κλίση** μίας ευθείας, αυτή θα πρέπει να έχει τις **μονάδες** του λόγου των αντίστοιχων μεγεθών κατά τους άξονες y/x και να **ΜΗΝ** υπολογίζεται από την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x. Στην παραπάνω γραφική παράσταση η κλίση έχει μονάδες N/m. Εάν η γραφική παράσταση δεν ήταν ευθεία θα φέρναμε εφαπτομένη στο συγκεκριμένο σημείο και θα ακολουθούσαμε την ίδια διαδικασία.
- Το σημείο στο οποίο η ευθεία τέμνει τον άξονα y, έχει τις μονάδες του μεγέθους σ΄αυτόν τον άξονα. Για παράδειγμα αν δύο μετρούμενα μεγέθη συνδέονται με τη σχέση μορφής $y=a+bx^2$, η γραφική παράσταση $y= f(x^2)$ είναι της μορφής y= b X +a δηλαδή γραμμική κι άρα αναμένεται να είναι ευθεία με κλίση b και σημείο τομής με τον άξονα y, a . Η σταθερά b είναι ίση με την κλίση της ευθείας γραμμής δηλαδή αν (x_1,y_1) και (x_2,y_2) είναι δύο οποιαδήποτε σημεία πάνω στην ευθεία τότε

$$\text{κλίση b} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

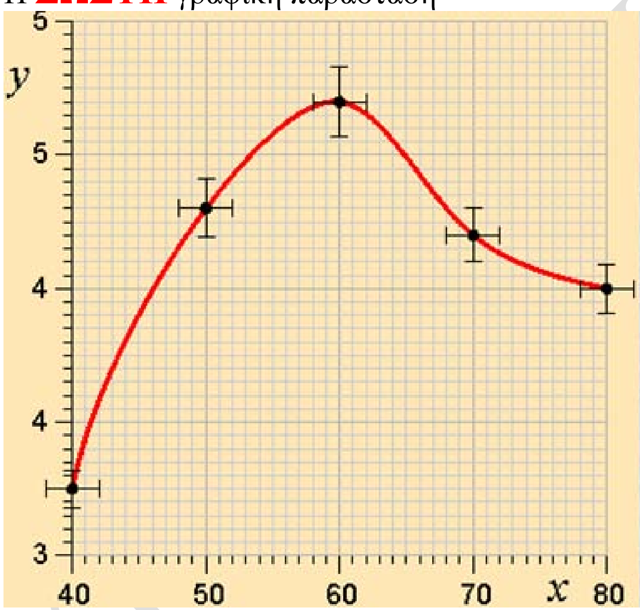
(βλ. Υπόδειγμα Εργαστηριακής Άσκησης)

6. Τα πειραματικά σημεία δεν σημειώνονται πάνω στη γραφική παράσταση και ούτε χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της κλίσης.

7. Η συνηθέστερη **ΛΑΘΟΣ** γραφική παράσταση



Η **ΣΩΣΤΗ** γραφική παράσταση



4. ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗΣ ΑΣΚΗΣΗΣ

Ονοματεπώνυμο:
ΑΜ:
Άσκηση:
Ημέρα, Ώρα, Τμήμα:
Ημερομηνία Άσκησης:

Ημερομηνία Παράδοσης:

Μέτρηση της εστιακής απόστασης φακών

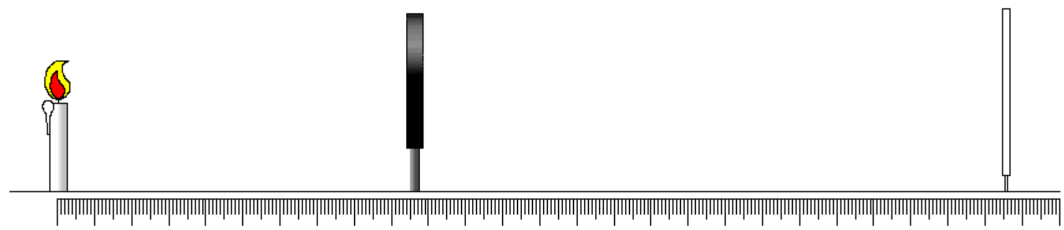
Σύντομη διατύπωση του σκοπού της άσκησης

Θεωρία: ……

Περιεκτική διατύπωση της θεωρίας

Συσκευή:

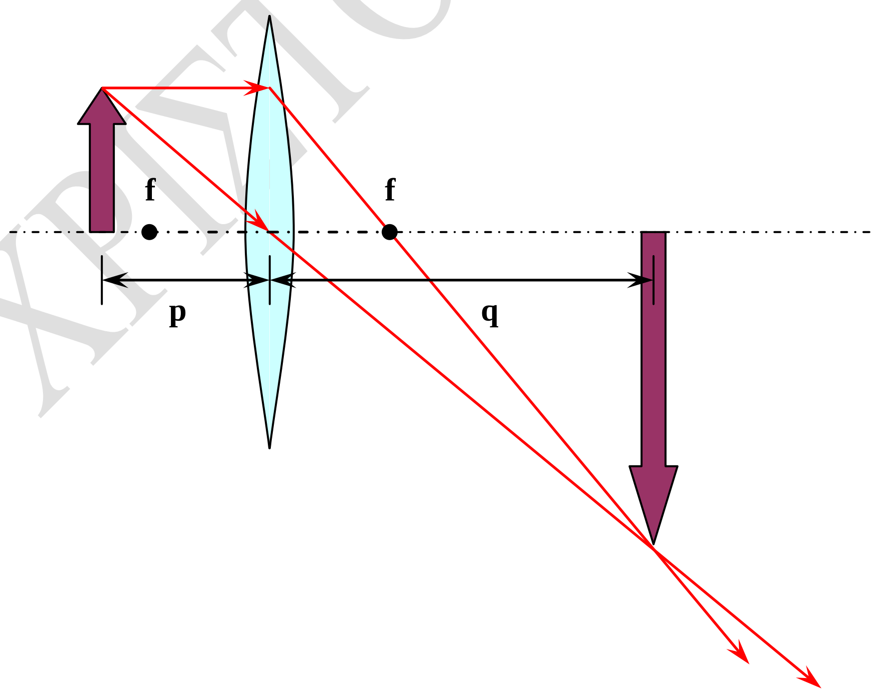
Η συσκευή που χρησιμοποιήθηκε περιλαμβάνει μια βαθμολογημένη οριζόντια ράβδο πάνω στην οποία στηρίζονται η φωτεινή πηγή (λαμπτήρας πυράκτωσης με τροφοδοτικό), ο φακός του οποίου την εστιακή απόσταση θα υπολογίσουμε και ένα λευκό πέτασμα:



Διαδικασία:

Περιγράφεται η διαδικασία (τυχόν αλλαγές), με ένα σχήμα για σαφήνεια

1. Τοποθετήσαμε το φακό πλησιέστερα προς τον λαμπτήρα και όταν σχηματίστηκε καθαρό είδωλο στην οθόνη μετρήσαμε την απόσταση ειδώλου – φακού q και την απόσταση αντικειμένου – φακού p .
2. Επαναλάβαμε την ίδια διαδικασία με το φακό πλησιέστερα στην οθόνη. Οι τιμές περιλαμβάνονται στον Πίνακα Ι
3. Από τις μετρήσεις αυτές υπολογίσαμε την εστιακή απόσταση του φακού (Πίνακας Ι) και την ισχύ σε διοπτρίες.



Όταν έχουμε λεπτό φακό εστιακής απόστασης f, τότε οι ακτίνες που σχηματίζουν μικρές γωνίες με τον κύριο οπτικό άξονα σχηματίζουν είδωλο του οποίου η απόσταση συνδέεται προς την απόσταση του αντικειμένου με την εξίσωση

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \qquad (1)$$

Οι αποστάσεις p, q θεωρούνται θετικές αν το είδωλο και το αντικείμενο είναι πραγματικά – όπως στην περίπτωση μας – και αρνητικές αν είναι φανταστικά. Η p θεωρείται θετική εάν το αντικείμενο βρίσκεται μπροστά από την φακό και η q εάν το είδωλο βρίσκεται πίσω από το φακό -όπως σ΄αυτήν την περίπτωση. Τα p, q μετρήθηκαν 14 φορές και η εστιακή απόσταση υπολογίστηκε στην τρίτη στήλη του Πίνακα Ι από τη σχέση (1)

$$f=\frac{pq}{p+q} \qquad (2)$$

Εξηγήστε τους αριθμητικούς υπολογισμούς σας. Εάν επαναλαμβανονται, δώστε ένα παράδειγμα για κάθε υπολογισμό

π.χ για p=11.3 cm q=88.2 cm προκύπτει από τη (2) :

$$\mathrm{f}=\frac{11.3cm88.2cm}{(11.3+88.2)cm}=\frac{996.66cm^2}{99.5cm}=10.02\ cm$$

Πίνακας Ι

Τα δεδομένα παρατίθενται ευδιάκριτα σε πίνακα με τις μονάδες των μεγεθών και με σημαντικά ψηφία.

α/α	**p (cm)**	**q (cm)**	**f (cm)**	$\bar{f}$ **(cm)**	**1/p (10^{-2} cm^{-1})**	**1/q (10^{-2} cm^{-1})**
1	11,3	88,2	10,02		8,85	1,13
2	11,3	82,9	9,94		8,85	1,20
3	11,5	77,0	10,01		8,70	1,30
4	11,6	71,7	9,98		8,62	1,40
5	11,7	69,0	10,00		8,55	1,45
6	11,8	61,6	9,90	9.97	8,47	1,62
7	12,2	50,8	9,84		8,20	1,97
8	12,6	40,8	9,63		7,94	2,45
9	13,3	36,5	9,75		7,52	2,74
10	15,6	31,6	10,44		6,41	3,16
11	17,3	25,1	10,24		5,78	3,98
12	25,1	15,2	9,47		3,98	6,58
13	33,4	15,4	10,54		2,99	6,49
14	35,4	13,6	9,82		2,82	7,35

Η τιμή της εστιακής απόστασης προκύπτει από τη μέση τιμή των παραπάνω μετρήσεων

$$\bar{f} = \frac{\sum_{i=1}^{14} f_i}{14} = 9.97 \text{ cm}$$

Πίνακας ΙΙ

α/α	**f (cm)**	$\bar{f}$ **(cm)**	**f-** $\bar{f}$ **(cm)**	**(f-** $\bar{f}$ **)^2 (cm^2)**	**δ** $\bar{f}$ **(cm)**
1	10,02				
2	9,94				
3	10,01				
4	9,98				
5	10,00				
6	9,90	9.97			
7	9,84				
8	9,63				
9	9,75				
10	10,44				
11	10,24				
12	9,47				
13	10,54				
14	9,82				
				$\sum_{i=1}^{14}(f-\bar{f})^2$	

.
Το σφάλμα της μέσης τιμής **δ** $\bar{f}$ θα υπολογιστεί μετά τη συμπλήρωση του πίνακα ΙΙ και θα εκφραστεί τηρώντας τον κανόνα του ενός σημαντικού ψηφίου κι άρα κάνοντας τις σχετικές στρογγυλοποιήσεις, οπότε η απάντηση σας θα εκφραστεί ως $\bar{f} \pm \delta\bar{f}$ και $\bar{f} \pm \sigma_{\sigma\chi}\%$

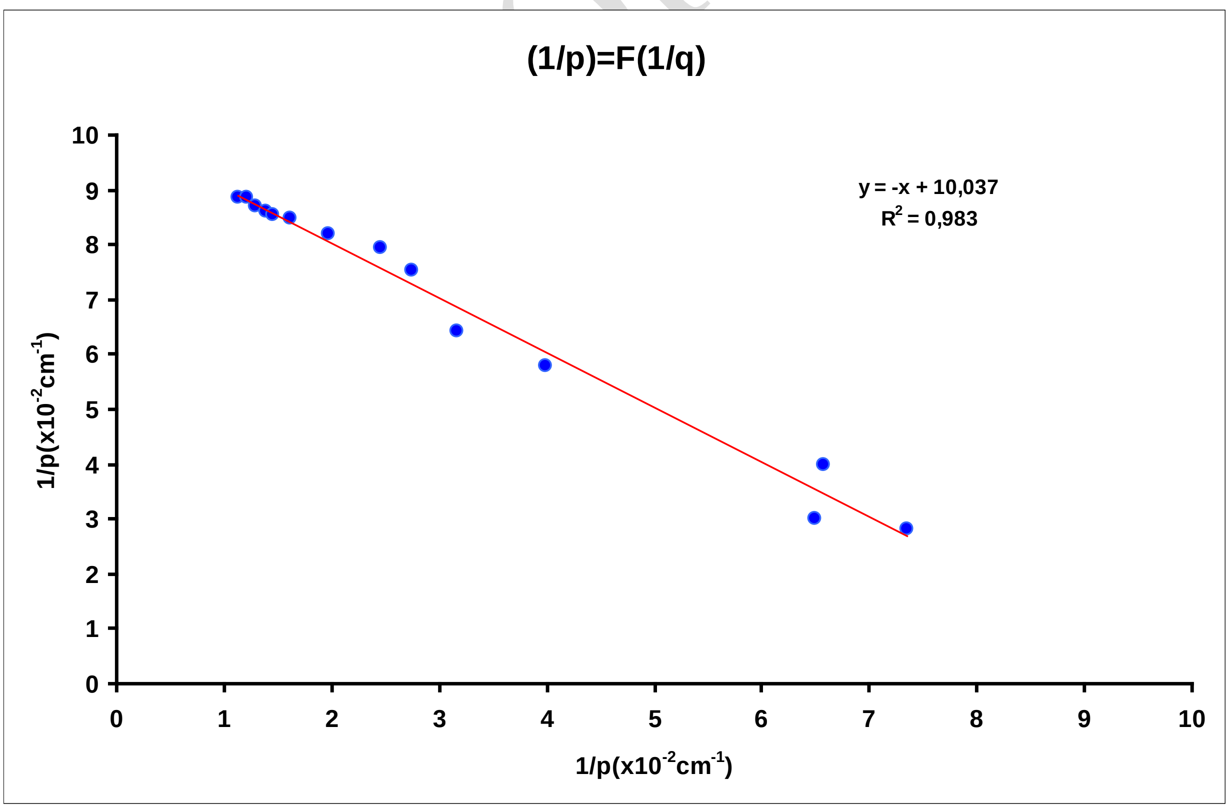
Η ισχύς P του φακού ορίζεται ως P= 1/f δηλαδή ως το αντίστροφο της εστιακής του απόστασης και εκφράζεται σε διοπτρίες όταν η f εκφράζεται σε (m).
Άρα P =10.0 διοπτρίες

4. Να υπολογιστεί η εστιακή απόσταση με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης (1/p) = F (1/q)

4. Γραφική παράσταση

Υπολογίζουμε τις τιμές των 1/p και 1/q με βάση τις τιμές του παραπάνω πίνακα. Η εξίσωση $\frac{1}{p}=\frac{1}{f}-\frac{1}{q}$ είναι της μορφής Y= -X + A και άρα η γραφική παράσταση της (1/p) = F (1/q) αναμένεται να είναι ευθεία γραμμή (φθίνουσα) με αρνητική κλίση. Σχεδιάζεται η γραφική παράσταση και περνάμε ανάμεσα στα πειραματικά σημεία μία ευθεία γραμμή. Η πειραματική γραμμή είναι αποδεκτή και δείχνει ότι είναι σε συμφωνία με την παραπάνω σχέση.

Οι άξονες περιλαμβάνουν το μέγεθος και μονάδες . Τα πειραματικά σημεία φαίνονται καθαρά. Η γραμμή δεν ενώνει όλα τα πειραματικά σημεία αλλά περνάει ανάμεσά τους σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων



Για να υπολογίσουμε την εστιακή απόσταση f υπολογίσαμε από την γραφική παράσταση το σημείο τομής με τον άξονα y (τεταγμένη) γιατί αν $p \to \infty \Rightarrow \frac{1}{p} = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{q}$ ή με τον άξονα x (τετμημένη) γιατί αν $q \to \infty \Rightarrow \frac{1}{q} = 0 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{p}$

Y = 10 10^{-2} cm^{-1} και άρα 1/f = 10^{-1} cm^{-1} δηλαδή f = 10 cm.

Θα υπολογίσετε επίσης το σχετικό σφάλμα των δύο μεθόδων, αριθμητικής και γραφικής Αυτή η τιμή (f = 10 cm). βρίσκεται σε καλή συμφωνία με αυτή που υπολογίστηκε αριθμητικά από τις μετρήσεις με σφάλμα

Εάν η απόκλιση από τη θεωρητική τιμή είναι μεγάλη αιτιολογήστε τα σφάλματα που υπεισέρχονται στις μετρήσεις σας

$$\sigma = \frac{10 - 9.97}{9.97} 100\,\% = 0.3\%$$

Η φυσική σημασία της τεταγμένης αναφέρεται στην περίπτωση όπου το αντικείμενο είναι στο άπειρο και τότε το είδωλο σχηματίζεται στην εστία του συγκλίνοντος φακού και της τετμημένης στην περίπτωση που το είδωλο σχηματίζεται στο άπειρο όταν το αντικείμενο βρίσκεται στην εστία του φακού)

Σχόλια:

Αυτό είναι το πιο σημαντικό μέρος της αναφοράς σας όπου θα πρέπει να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά που περιγράφονται από τη θεωρία του φυλλαδίου ή γενικότερα με τις θεωρητικές τιμές και να αιτιολογήσετε τα συμπεράσματά σας, Όπως να υπολογίσετε το σχετικό σφάλμα των δύο μεθόδων, αριθμητικής και γραφικής στον υπολογισμό της εστιακής απόστασης.

Ελέγξτε εάν απαντήσατε σε όλες τις ερωτήσεις του φυλλαδίου

Π.χ. Η φυσική σημασία της τεταγμένης αναφέρεται στην περίπτωση όπου το αντικείμενο είναι στο άπειρο και τότε το είδωλο σχηματίζεται στην εστία του συγκλίνοντος φακού και της τετμημένης στην περίπτωση που το είδωλο σχηματίζεται στο άπειρο όταν το αντικείμενο βρίσκεται στην εστία του φακού.

Ε-Π Χριστοπούλου Λέκτορας
(Απρίλιος 2005)